

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ МАТРИЦ НАД ГИПЕР-ДУАЛЬНОЙ АЛГЕБРОЙ С СООТНОШЕНИЯМИ $\varepsilon^2 = 2\omega$ , $\varepsilon\omega = \omega^2 = 0$

*Олифер В.И.*

Цель статьи – трансформировать классический вековой определитель и соответствующий ему характеристический полином над полем  $\mathbb{R}$  для случая, когда элементы определителя являются гипер-дуальными числами 2-го порядка.

Для решения поставленной задачи будем исходить из классической формулировки векового определителя [1-3]

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad [a_{ij}], \lambda \in \mathbb{R}, \quad I \equiv [\delta_{ij}], \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (1)$$

Раскрытие векового определителя можно осуществить методом Лейверрье, который основан на формулах Ньютона [2, 3] для сумм степеней корней алгебраического уравнения.

Пусть

$$y_n(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \lambda^{n-k} p_k = 0, \quad p_0 = 1 \quad (2)$$

– характеристический полином данной матрицы  $A = [a_{ij}]$  размером  $n \times n$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – полная совокупность его корней, где каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность и, наконец,  $p_k$  – сумма всех главных миноров матрицы  $A$   $k$ -го порядка, которые определяются по формулам:

$$p_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} p_{k-i} t_i, \quad t_i = \text{tr}(A^i), \quad k = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где  $t_i$  – сумма всех диагональных элементов матрицы  $A^i$ .

Таким образом, схема раскрытия векового определителя  $\det(A - \lambda I)$  по методу Лейверрье состоит из следующих шагов: сначала вычисляются  $A^i$  – степени данной матрицы  $A$ , затем находятся соответствующие  $t_i$  – суммы элементов главных диагоналей матриц  $A^i$  и, наконец, по формулам (3) определяются искомые коэффициенты  $p_k$ . В результате получаем характеристический полином для матрицы  $n$ -го порядка  $y_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \lambda^{n-k} p_k$ .

Далее следуя принципу перенесения Котельников А. П. [4, 5]: «Решение, полученное на множестве вещественных чисел, может быть перенесено в область гипер-дуальных чисел путем замены вещественных чисел и функций на гипер-дуальные числа и

соответствующие функции гипер-дуального аргумента», перенесем полученное выше решение на пространства гипер-дуальных чисел и матриц.

Алгебра гипер-дуальных чисел 2-го порядка следует соотношениям, полученным в [6]:

$$\begin{aligned} X &= x + x_1\varepsilon + x_2\omega \text{ и } Y = y + y_1\varepsilon + y_2\omega, \\ X \pm Y &= x \pm y + (ax_1 \pm y_1)\varepsilon + (x_2 \pm y_2)\omega, \\ X \cdot Y &= x \cdot y + (x \cdot y_1 + y \cdot x_1)\varepsilon + (x \cdot y_2 + 2x_1 \cdot y_1 + y \cdot x_2)\omega, \\ (x, x_1, x_2), (y, y_1, y_2) &\in \mathbb{R}; \quad \varepsilon^2 = 2\omega, \quad \varepsilon\omega = \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

а алгебра гипер-дуальных матриц определяется согласно [7] как:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [A] + [A]_1\varepsilon + [A]_2\omega, \quad \mathbf{B} = [B] + [B]_1\varepsilon + [B]_2\omega, \\ \mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= [A] \pm [B] + ([A]_1 \pm [B]_1)\varepsilon + ([A]_2 \pm [B]_2)\omega, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= [A] \cdot [B] + ([A] \cdot [B]_1 + [A]_1 \cdot [B])\varepsilon + ([A] \cdot [B]_2 + 2[A]_1 \cdot [B]_1 + [A]_2 \cdot [B])\omega, \end{aligned} \quad (5)$$

где элементы матриц  $[A]$ ,  $[A]_1$ ,  $[A]_2$  и  $[B]$ ,  $[B]_1$ ,  $[B]_2 \in \mathbb{R}$ , а матрицы  $[A]_1$  и  $[A]_2$  можно трактовать как матрицы возмущений 1-го и 2-го рода соответственно.

Тогда формулы (2, 3) согласно принципу перенесения Котельникова А. П. преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} Y(\Lambda)_n = \det(\mathbf{A} - \Lambda I) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k P_k \Lambda^{n-k} = 0, \quad P_0 = 1, \\ P_k &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} P_{k-i} T_i, \quad T_i = \text{tr}(\mathbf{A}^i), \end{aligned} \quad (6)$$

где:  $\Lambda = \lambda + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\omega$ ,  $P = p + p_1\varepsilon + p_2\omega$ ,  $T = t + t_1\varepsilon + t_2\omega$

Если учесть, что

$$\Lambda^m = \lambda^m + \alpha_m\varepsilon + \beta_m\omega, \quad \alpha_m = m\lambda_1\lambda^{m-1}, \quad \beta_m = m[\lambda_2\lambda^{m-1} + (m-1)\lambda_1^m\lambda^{m-2}],$$

то

$$Y(\Lambda)_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k G_{km} = 0, \quad m = n - k, \quad P_0 = 1, \quad (7)$$

где:

$$\begin{aligned} G_{km} &= P_k \cdot \Lambda^m = (p_k + p_{1k}\varepsilon + p_{2k}\omega)(\lambda^m + \alpha_m\varepsilon + \beta_m\omega) = \\ &= p_k\lambda^m + (p_k\alpha_m + p_{1k}\lambda^m)\varepsilon + (p_k\beta_m + p_{2k}\lambda^m + 2p_{1k}\alpha_m)\omega = \\ &= p_k\lambda^m + (mp_k\lambda_1\lambda^{m-1} + p_{1k}\lambda^m)\varepsilon + \end{aligned} \quad (8)$$

$$+ (mp_k[\lambda_2\lambda^{m-1} + (m-1)\lambda_1^m\lambda^{m-2}] + p_{2k}\lambda^m + 2mp_{1k}\lambda_1\lambda^{m-1})\omega$$

Фактически характеристическое уравнение  $Y(\Lambda)_n$  – суть алгебраический полином  $n$ -го порядка, элементами которого являются гипер-дуальные числа 2-го порядка (Sdn2):

$$Y(\Lambda)_n = P_0\Lambda^n - P_1\Lambda^{n-1} + P_2\Lambda^{n-2} - P_3\Lambda^{n-3} + \dots + (-1)^n P_n$$

Для его решения следует выполнить операции выделения главной и мнимых частей  $Y(\Lambda)_n$ . Обозначим эти операции  $Re$ ,  $Im_1, Im_2$ :

$$Y = y + y_1\varepsilon + y_2\omega, \quad Y(\Lambda).Re = y, \quad Y(\Lambda).Im_1 = y_1, \quad Y(\Lambda).Im_2 = y_2$$

В результате можно составить таблицу разделения  $G_{km}$  (8) на главную  $Re$  и мнимые части  $Im_1, Im_2$ :

$G_{km}$	$Re$	$Im_1, \varepsilon$	$Im_2, \omega$
$G_{0n}$	$p_0\lambda^n$	$np_0\lambda_1\lambda^{n-1} + p_{10}\lambda^n$	$np_0(\lambda_2\lambda^{n-1} + (n-1)\lambda_1^n\lambda^{n-2}) + p_{20}\lambda^n + 2np_{10}\lambda_1\lambda^{n-1}$
$G_{1n-1}$	$p_1\lambda^{n-1}$	$(n-1)p_1\lambda_1\lambda^{n-2} + p_{11}\lambda^{n-1}$	$(n-1)p_1(\lambda_2\lambda^{n-2} + (n-2)\lambda_1^{n-1}\lambda^{n-3}) + p_{21}\lambda^{n-1} + 2(n-1)p_{11}\lambda_1\lambda^{n-2}$
.....			
$G_{n0}$	$p_n$	$p_{1n}$	$p_{2n}$

Таблица 1. Формулы  $G_{km}$  для матрицы  $n \times n$

Из приведенной таблицы видно, что решение уравнения  $Y(\Lambda)_n = 0$  сводится к системе 3-х уравнений:

- 1)  $Y(\Lambda).Re = 0 \quad \mapsto (\lambda^*) - \text{корни уравнения}$
  - 2)  $Y(\Lambda).Im_1 \Big|_{\lambda^*} = 0 \quad \mapsto \lambda_1^*$
  - 3)  $Y(\Lambda).Im_2 \Big|_{\lambda^*, \lambda_1^*} = 0 \quad \mapsto \lambda_2^*$
- (9)

Так как  $\Lambda = \lambda + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\omega$ , то в главную часть  $Y(\Lambda).Re$  будут входить только  $\lambda$  разных степеней от 0 до порядка матрицы  $[A]$ , в 1-ю мнимую часть – разные степени  $\lambda$  и только первая степень  $\lambda_1$ , во 2-ю мнимую часть – разные степени  $\lambda, \lambda_1$  и только первая степень  $\lambda_2$ . Иными словами каждая  $i$ -я мнимая часть линейна относительно  $\lambda_i$  и нахождение её корня кажется весьма тривиально. Количество корней будет равно  $3n$ . Общая схема

решения определяется следующей последовательностью действий: 1) нахождение всех  $n$  корней  $\lambda^*$ ; 2) каждый корень по очереди подставляется в  $Y(\Lambda).Im_1$  и находится соответствующий ему корень  $\lambda_1^*$ ; 3) корни  $\lambda^*$  и  $\lambda_1^*$  подставляются в  $Y(\Lambda).Im_2$  и находится соответствующий им корень  $\lambda_2^*$ .

Проблема возникает с нахождением корня вещественной главной части  $\lambda^*$ , который входит во все мнимые части. Во-первых, уравнение 5-й степени и выше, вообще говоря, неразрешимо в радикалах (теорема Абеля-Руффини). Во-вторых, для степеней  $2 \div 4$  корень может быть вещественным или комплексным. Комплексный корень не следует учитывать, если дискриминант уравнения главной части равен нулю. Если степень многочлена главной части выше 4-х, то для его решения следует использовать те или иные численные итерационные методы, например, см. [3].

Рассмотрим теперь более детально вариант когда исходная матрица имеет размер  $3 \times 3$ . В этом случае таблица для вычисления  $G_{km}$  имеет вид:

$G_{km}$	$Re_3$	$Im1_3, \varepsilon$	$Im2_3, \omega$
$G_{30}$	$\lambda^3$	$3p_0\lambda_1\lambda^2 + p_{10}\lambda^3$	$3p_0(\lambda_2\lambda^2 + 2\lambda_1^3\lambda) + p_{20}\lambda^3 + 6p_{10}\lambda_1\lambda^2$
$-G_{12}$	$p_1\lambda^2$	$2p_1\lambda_1\lambda + p_{11}\lambda^2$	$2p_1(\lambda_2\lambda + \lambda_1^2\lambda) + p_{21}\lambda^2 + 4p_{11}\lambda_1\lambda$
$G_{21}$	$p_2\lambda$	$p_2\lambda_1 + p_{12}\lambda$	$p_2\lambda_2 + p_{22}\lambda + 2p_{12}\lambda_1$
$-G_{30}$	$p_3$	$p_{13}$	$p_{23}$

Таблица 2. Формулы  $G_{km}$  для матрицы  $3 \times 3$

Тогда получим три уравнения, позволяющие последовательно получить все девять корней характеристического полинома матрицы  $A = [a_{ij}]$  размером  $3 \times 3$ :

$$\lambda^3 - p_1\lambda^2 + p_2\lambda - p_3 = 0;$$

$$\lambda_1 = -\frac{(p_{10}\lambda^3 - p_{11}\lambda^2 + p_{12}\lambda - p_{13})}{\gamma};$$

$$\lambda_2 = -\frac{(p_{20}\lambda^3 - p_{21}\lambda^2 + p_{22}\lambda + 6p_0\lambda_1^3\lambda + 6p_{10}\lambda_1\lambda^2 - 4p_{11}\lambda_1\lambda + 2p_{12}\lambda_1 - 2p_1\lambda_1^2 - p_{23})}{\gamma};$$

$$\text{где } \gamma = (3p_0\lambda^2 - 2p_1\lambda + p_2)$$

Для матрицы  $A = [A] + [A]_1\varepsilon + [A]_2\omega$ ,

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad [A]_1 = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad [A]_2 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 2 \\ -6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

в следующих таблицах представлены результаты расчета, полученные на основании программного кода, приведенного в Приложении.

$k$	$Y(\Lambda).Re$	$Y(\Lambda).Im_1$	$Y(\Lambda).Im_2$
0	1	0	0
1	-18	-8	-8
2	64	52	28
3	-64	-64	64

Таблица 2. Значения  $p_k$ ,  $p_{1k}$  и  $p_{2k}$  для матрицы  $3 \times 3$

	$\lambda^*$	$\lambda_1^*$	$\lambda_2^*$
1	13.65685424949238	6.4142135623730985	-128.60675490395798
2	2.0000000000000000	-2.0000000000000000	58.000000000000509
3	2.34314575050762	3.5857864376268984	96.60675490395695

Таблица 3. Значения корней для матрицы  $3 \times 3$

В заключении заметим, что используемая здесь алгебра гипер-дуальных чисел аналогична алгебрам Вейля. Их обобщения были введены в [8] и широко используются в теории джет-расширений и натуральных операций [9], а также в синтетической дифференциальной геометрии [10]. В настоящей работе мы рассматривали конкретную трёхмерную нильпотентную алгебру, которая является алгеброй Вейля 3-го порядка. Она коммутативна и ассоциативна над  $\mathbb{R}$ , порождена элементами  $\varepsilon$  и  $\omega$  с определяющими соотношениями  $\varepsilon^2 = 2\omega$ ,  $\varepsilon\omega = 0$ ,  $\omega^2 = 0$ .

В статье были получены явные формулы для характеристического многочлена матриц над усечённой гипердуальной алгеброй, определяемой соотношениями  $\varepsilon^2 = 2\omega$ ,  $\varepsilon\omega = \omega^2 = 0$ . Случай  $3 \times 3$  полностью вычислен в замкнутом виде. Возможные направления дальнейших исследований включают теорию Жордана и спектральную теорию возмущений над этой алгеброй.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

C# коде реализующий алгебры гипер-дуальных чисел 2-го порядка (Sdn2) и гипер-дуальных матриц (Sdn2M), а также процедура RunNxN(...) вычисления коэффициентов полинома векового уравнения любого порядка и нахождение его корней для 3-го порядка.

```
using MathNet.Numerics.LinearAlgebra;
using MathNet.Numerics.RootFinding;
using System;
using SM = System.Math;

// Алгебра гипер-дуальных чисел 2-го порядка
public struct Sdn2 {
    public double Re, Im1, Im2;
    public Sdn2(double x, double x1, double x2) { Re = x; Im1 = x1; Im2 = x2;}
    public static Sdn2 operator *(double x, Sdn2 X)
    { return new Sdn2(x * X.Re, x * X.Im1, x * X.Im2); }
    public static Sdn2 operator *(Sdn2 X, Sdn2 Y)
    { return new Sdn2(X.Re * Y.Re,
        X.Re * Y.Im1 + Y.Re * X.Im1,
        X.Re * Y.Im2 + 2.0 * X.Im1 * Y.Im1 + Y.Re * X.Im2);
    }
    public static Sdn2 operator ^(Sdn2 X, int n)
    { return new Sdn2(Math.Pow(X.Re, n),
        n * Math.Pow(X.Re, n - 1)*X.Im1,
        n * (Math.Pow(X.Re, n - 1)*X.Im2 +
        (n - 1)*Math.Pow(X.Re, n - 2)*X.Im1*X.Im1));
    }
    public static Sdn2 operator +(Sdn2 X, Sdn2 Y)
    { return new Sdn2(X.Re + Y.Re, X.Im1 + Y.Im1, X.Im2 + Y.Im2);}
    public static Sdn2 operator -(Sdn2 X, Sdn2 Y)
    { return new Sdn2(X.Re - Y.Re, X.Im1 - Y.Im1, X.Im2 - Y.Im2);}
    public static Sdn2 operator -(Sdn2 X) { return new Sdn2(-X.Re, -X.Im1, -X.Im2);}
}

// Алгебра гипер-дуальных матриц
public struct Sdn2M {
    public Matrix<double> Re, Im1, Im2;
    public Sdn2M(double[,] M, double[,] M1, double[,] M2)
    { Re = Matrix<double>.Build.DenseOfArray(M);
        Im1 = Matrix<double>.Build.DenseOfArray(M1);
        Im2 = Matrix<double>.Build.DenseOfArray(M2);
    }
    public Sdn2M(Matrix<double> M, Matrix<double> M1, Matrix<double> M2)
    { Re = M; Im1 = M1; Im2 = M2;}
    public static Sdn2M operator *(double x, Sdn2M X)
    { return new Sdn2M(x * X.Re, x * X.Im1, x * X.Im2); }
    public static Sdn2M operator *(Sdn2M X, Sdn2M Y)
    { return new Sdn2M(X.Re * Y.Re, X.Re * Y.Im1 +
        X.Im1 * Y.Re, X.Re * Y.Im2 + 2.0 * X.Im1 * Y.Im1 + X.Im2 * Y.Re);
    }
    public static Sdn2M operator +(Sdn2M X, Sdn2M Y){
        return new Sdn2M(X.Re + Y.Re, X.Im1 + Y.Im1, X.Im2 + Y.Im2);
    }
    public static Sdn2M operator -(Sdn2M X, Sdn2M Y)
    { return new Sdn2M(X.Re - Y.Re, X.Im1 - Y.Im1, X.Im2 - Y.Im2); }
    public static Sdn2M operator ^(Sdn2M X, int n)
    { var Y = X;
        for (int i = 2; i <= n; i++){Y = Y * X;}
        return Y;
    }
}
```

```

        public static Sdn2 TR(Sdn2M A)
        { return new Sdn2(A.Re.Trace(), A.Im1.Trace(), A.Im2.Trace()); }
    }

// Определение коэффициентов полинома векового уравнения любого порядка
// и нахождение его корней для 3-го порядка
public static public static (Sdn2[] Pn, double[,] Roots)
    RunNxN(double[,] X, double[,] X1, double[,] X2) {
    var A = new Sdn2M(X, X1, X2);
    var n = A.Re.RowCount;
    var a = A;
    Sdn2[] Pn = new Sdn2[n + 1], Sn = new Sdn2[n];
    Pn[0] = new Sdn2(1,0,0);
    for (int i = 0; i <= n - 1; i++){
        Sn[i] = Sdn2M.TR(A);
        for (int j = 0; j <= i; j++){Pn[i + 1] += SM.Pow(-1.0, j)*(Pn[i - j]*Sn[j]);}
        Pn[i + 1] = (1.0/(i + 1.0))*Pn[i + 1];
        if (i != n - 1) { A = a * A; }
    }
    (Sdn2[] Pn, double[,] Roots) Q = (new Sdn2[3], new double[3, 3]);
    for (int i = 0; i <= n; i++) {Pn[i] = SM.Pow(-1.0, i)*Pn[i];}
    (double, double, double) roots;
    if (n == 3) {
        roots = Cubic.RealRoots(Pn[3].Re, Pn[2].Re, Pn[1].Re);
        double λ, λ1, λ2, γ;
        double[] Rt = {roots.Item1, roots.Item2, roots.Item3};
        double[,] R = new double[3, 3];
        for (int i = 0; i <= n - 1; i++)
        { λ = Rt[i];
            γ = 3 * Pn[0].Re * λ * λ + 2 * Pn[1].Re * λ + Pn[2].Re;
            λ1 = -(Pn[0].Im1*λ * λ * λ + Pn[1].Im1 * λ * λ + Pn[2].Im1*λ + Pn[3].Im1) / γ;
            λ2 = -(Pn[0].Im2 * λ * λ * λ + Pn[1].Im2 * λ * λ + Pn[2].Im2 * λ +
                6 * Pn[0].Re * λ1 * λ1 * λ1 * λ + 6 * Pn[0].Im1 * λ * λ * λ1 +
                4 * Pn[1].Im1 * λ * λ1 +
                2 * Pn[2].Im1 * λ1 + 2 * Pn[1].Re * λ1 * λ1 + Pn[3].Im2) / γ;
            R[i, 0] = λ; R[i, 1] = λ1; R[i, 2] = λ2;
        }
        Q.Pn = Pn; Q.Roots = R;
    }
    return Q;
}

// Пример расчета
double[,] A_0 = { { 5, 1, 4}, { 3, 3, 2}, { 6, 2, 10} };
double[,] A_1 = { { -5, -1, -4}, { 3, 3, 2}, { 6, 2, 10} };
double[,] A_2 = { { -5, 1, 4}, { -3, 3, 2}, { -6, 2, 10} };

var Q = RunNxN(A_0, A_1, A_2);
var Pn = Q.Pn;
var roots = Q.Roots;

```

## ЛИТЕРАТУРА

1. Козин Р. Г. Алгоритмы численных методов линейной алгебры и их программная реализация. – М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 192 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. . М.: Физматгиз, 1966. – 665 с.
3. Romm Ya.E., Tyushnyakova I.A. On parallel calculation of eigenvectors based on the Leverrier method modified by D.K. Faddeev - Modern High Technologies № 4, – 2025.
4. Котельников А. П. Винты и комплексные числа. Казань, 1896. – 6 с.
5. Олифер В.И. Принцип перенесения в теории дуальных и усеченных гипер-дуальных чисел. – URL: [http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/принцип\\_перенесения\\_в\\_теории\\_дуальных\\_и\\_усеченных\\_гипер-дуальных\\_чисел.pdf](http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/принцип_перенесения_в_теории_дуальных_и_усеченных_гипер-дуальных_чисел.pdf), – 2021.
6. Олифер В.И. Усеченные гипер-дуальные числа в автоматическом дифференцировании.– URL: [http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/усеченные\\_гипер-дуальные\\_числа\\_в\\_автоматическом\\_дифференцировании.pdf](http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/усеченные_гипер-дуальные_числа_в_автоматическом_дифференцировании.pdf), – 2020.
7. Олифер В.И. Гипер-дуальные матричные уравнения и их чувствительность. – URL: [http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/гипер-дуальные\\_матрицы.pdf](http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/гипер-дуальные_матрицы.pdf), – 2020.
8. Weil A. Colloque de Géométrie Différentielle, Strasbourg, – 1953.
9. Kolář I., Michor P. W., Slovák J. Natural Operations in Differential Geometry, Springer, – 1993.
10. Kock A. Synthetic Differential Geometry, Cambridge University Press, – 2006.

## Абстракт

В статье получены явные формулы для характеристического многочлена матриц над усечённой гипердуальной алгеброй, определяемой отношениями  $\varepsilon^2 = 2\omega$ ,  $\varepsilon\omega = \omega^2 = 0$ . Случай  $3 \times 3$  полностью вычислен в замкнутом виде.

*In this article, explicit formulas are obtained for the characteristic polynomial of matrices over a truncated hyper-dual algebra defined by the relations  $\varepsilon^2 = 2\omega$ ,  $\varepsilon\omega = \omega^2 = 0$ . The  $3 \times 3$  case is completely computed in closed form.*

**Ключевые слова:** характеристические многочлены матриц, гипер-дуальные числа и матрицы, characteristic polynomials of matrices, hyper-dual numbers and matrices.