РЕАЛИЗАЦИЯ СЕМЕЙСТВА ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ЧЕБЫШЕВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИПЕР-ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Олифер В.И.

Одношаговые итерационные методы Чебышёва для решения уравнения $y = f(x)$ основаны на разложении по формуле Тейлора функции $x = \varphi(y)$, обратной к $f(x)$. Они могут иметь произвольно высокий порядок точности, определяемый количеством членов разложения для функции $\varphi(y)$) [1, 2, 3].

Из предположения, что вещественная функция $f(x)$ является гладкой и монотонной на интервале $[a, b]$, так что она взаимно однозначно отображает этот интервал в некоторый интервал $[\alpha, \beta]$, следует существование обратной к $f(x)$ функции $x = \varphi(y)$: $[\alpha, \beta] \to [a, b]$, которая имеет ту же гладкость, что и $f(x)$. Тогда разложение функции $\varphi(y)$, в окрестности $y = 0$ по формуле Тейлора имеет вид:

$$\varphi(0) \approx \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \varphi^{(k)}(y) \frac{y^k}{k!}, \quad \varphi^{(k)} = d^k \varphi / dy^k \tag{1}$$

Заменяя в (1) $y \to f(x)$ получим итерационную формулу Чебышёва (p +1)-го порядка:

$$x_{i+1} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \varphi^{(k)}(f(x_i)) \frac{f(x_i)^k}{k!}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

Для определения производных функции $\varphi^{(k)}(y)$ необходимо проследовательно дифференцировать тождество $x = \varphi(y)$, используя правило дифференцирования сложных функций ($\frac{d\varphi(y)}{dx} = \frac{d\varphi(y)}{dy}\frac{dy(x)}{dx}$):

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(0)} = x_i,\\
&\varphi^{(1)}(f(x))f'(x_i) = 1,\\
&\varphi^{(2)}\big(f(x)\big)f'(x_i)^2 + \varphi^{(1)}(f(x))f''(x_i) = 0,\\
&\varphi^{(3)}\big(f(x)\big)f'(x_i)^3 + 3\varphi^{(2)}\big(f(x)\big)f'(x_i)f''(x_i) + \varphi^{(1)}\big(f(x)\big)f'''(x_i) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{3}$$

Система соотношений (3) начиная со второй строки имеет треугольный вид, позволяющий последовательно найти $\varphi^{(k)}$ при $k > 0$:

$$\varphi^{(1)}(f(x)) = 1/f'(x_i),$$
$$\varphi^{(2)}\big(f(x)\big) = -f''(x_i)/f'(x_i)^3, \qquad (4)$$
$$\varphi^{(3)}\big(f(x)\big)f'(x_i)^3 = 3f''(x_i)^2/f'(x_i)^5 - f'''(x_i)/f'(x_i)^4\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Для p = 4 расчетная формула Чебышева 5-го порядка имеет вид [2]:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)^2 - \left(\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{f'''(x_i)}{f'(x_i)}\right]$$
$$-\left(\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)^4\left[\frac{5}{8}\left(\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}\right)^3 - \frac{5}{12}\frac{f''(x_i)f'''(x_i)}{f'(x_i)^2} + \frac{f''''(x_i)}{f'(x_i)}\right] = \qquad (5)$$
$$= x_i - D_i\left[1 + \frac{1}{2}(L_i + M_i) - \frac{1}{6}K_i + Q_i\right],$$

где: $D_i = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, $L_i = D_i\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}$, $M_i = L_i^2$, $K_i = D_i^2\frac{f'''(x_i)}{f'(x_i)}$,

$$Q_i = D_i^3 * \left[\frac{L_i}{D_i^3}\left(\frac{5}{8}M_i - \frac{5}{12}K_i\right) + \frac{f''''(x_i)}{f'(x_i)}\right], \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Удержание разных членов в (5) дает формулы для методов Чебышева со 2-го по 5-й порядок.

Порядок	$\boldsymbol{D_i}$	$\boldsymbol{L_i}$	$\boldsymbol{M_i}$	$\boldsymbol{K_i}$	$\boldsymbol{Q_i}$
2	•	0	0	0	0
3	•	•	0	0	0
4	•	•	•	•	0
5	•	•	•	•	•

Таблица 1. Значения D_i, L_i, M_i, K_i, Q для метода Чебышева 2-го – 5-го порядков

Для сравнения одношаговых методов Чебышева (5) с двухшаговыми методоми был также рассмотрен двухшаговой метод Чебышева-Хэлли 5-го порядка [4]:

$$x_{n+1} = x_n - \left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{L_n(x_n)}{1 - L_n(x_n)}\right]\cdot D_n(x_n),$$
$$\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1} - \left[1 + \frac{M(x_n, x_{n+1})}{1 - M(x_n, x_{n+1})}\right]\cdot D_n(x_n, x_{n+1}), \qquad x_{n+1} = \tilde{x}_{n+1}, \qquad (6)$$

где: $D_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $L_n = D_n \cdot \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}$,

$$M(x_n, x_{n+1}) = L_n(x_n) \cdot \left(1 - \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}\right), \quad D_n(x_n, x_{n+1}) = \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, 2, \dots;$$

В двухшаговых методах каждая итерация состаит из последовательном применении двух методов. Причем результат первого метода используется для реализации второго метода. Поэтому одна итерация фактически является двойной итерацией.

Из (5) видно, что метод Чебышева k-го порядка требует вычисление производных исходной функции $f(x)$ до (k –1)-го порядка. В свою очередь (6) использует только производные до 2-го порядка.

Для реализации формул (5) и (6) необходимо наличие простого и точного (с машинной точностью) способа определения значений производных разных порядков исходной функции $f(x)$. Это может быть успешно решено, если воспользоваться методом автоматического дифференцирования (АД) [5], суть которого заключается в создании нового типа данных и переопределения операций и базовых функций над ними. В качестве такого нового типа данных могут быть иcползованы гипер-дуальные числа 3-го класса [5].

Гипер-дуальное число 3-го класса имеет представление в виде $Z = z + z_1\boldsymbol{\varepsilon} + z_2\varpi + z_3\boldsymbol{\gamma}$, $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{R}$. Параметр z называется главной (*Re* – действительной) частью гипер-дуального числа, а z_1, z_2, z_3 – его мнимыми (*Im1*, *Im2*, *Im3* – инфинитезимальными) частями. Абстрактные элементы $\boldsymbol{\varepsilon}$, ϖ, $\boldsymbol{\gamma}$ образуют базис мнимых частей гипер-дуального числа, отвечающий следующими правилам: $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = 2\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon\omega} = 3\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\varepsilon\gamma} = \boldsymbol{\omega\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^2 = \boldsymbol{\omega}^2 = 0$. Алгебраические операции над дуальными числами 3-го класса определяются формулами:

$$\begin{aligned}
&X = x + x_1\boldsymbol{\varepsilon} + x_2\varpi + x_3\boldsymbol{\gamma}, \qquad Y = y + y_1\boldsymbol{\varepsilon} + y_2\varpi + y_3\boldsymbol{\gamma},\\
&X + Y = x + y + (x_1 + y_1)\boldsymbol{\varepsilon} + (x_2 + y_2)\varpi + (x_3 + y_3)\boldsymbol{\gamma},\\
&X{\cdot}Y = x{\cdot}y + (x{\cdot}y_1 + y{\cdot}x_1)\boldsymbol{\varepsilon} + (x{\cdot}y_2 + 2x_1{\cdot}y_1 + y{\cdot}x_2)\varpi + (x{\cdot}y_3 + y{\cdot}x_3 + 3(x_1{\cdot}y_2\\
&\qquad\qquad + y_1{\cdot}x_2))\boldsymbol{\gamma},\\
&Y^{-1} = y^{-1} - y^{-2}{\cdot}y_1\boldsymbol{\varepsilon} + y^{-2}(\,2{\cdot}y_1^2{\cdot}y^{-1} - y_2)\varpi + a^{-2}(6y_1{\cdot}y^{-1}(y_2 - y_1^2{\cdot}y^{-1}) - y_3)\boldsymbol{\gamma},\\
&X/Y = X{\cdot}Y^{-1},
\end{aligned} \tag{7}$$

а функция гипер-дуального аргумента 3-го класса, после ее разложения в ряд Тейлора, имеет вид

$$\begin{aligned}
F(X) = f(x) + x_1 f'(x)\boldsymbol{\varepsilon} + [x_2 f'(x) + x_1^2 f''(x)]\varpi +\\
+ [x_3 f'(x) + 3x_1x_2 f''(x) + x_1^3 f'''(x)]\boldsymbol{\gamma}
\end{aligned} \tag{8}$$

При $x_1 = 1$ и $x_2 = x_3 = 0$ соотношение (8) принимает форму:

$$F(x + \boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} + 0\boldsymbol{\gamma}) = f(x) + f'\boldsymbol{\varepsilon} + f''(x)\boldsymbol{\omega} + \ f'''(t)\boldsymbol{\gamma}, \quad f(x) = F(x + 0\boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} + 0\boldsymbol{\gamma}),$$

что позволяет представить производные функции $f(x)$, входящие в (5) и (6), следующим образом

$$f'(x) = F(X).Im1, \ f''(x) = F(X).Im2, \ f'''(x) = F(X).Im3,$$

$$f''''(x) = (\ f'''(x+h) - \ f'''(x))/h, \ \ h = 10^{-5},$$

где: $X = x + \boldsymbol{\varepsilon} \ + \ 0\omega \ + 0\boldsymbol{\gamma}, \ \ F(X)$ – целевая функция $f(x)$, записанная в терминах гипер-дуальных чисел 3-го класса.

Не менее важным вопросом является критерий окончания итерационного процесса. К сожалению, нет универсального рецепта в этом вопросе. Обычно в качестве этого критерия используется одно из следующих неравенств: $\|f(x_i)\| \le \delta$; $\|f(x_i) - f(x_{i-1})\| \le \delta$; $i \ge Imax$ (δ – заданная малая величина, $Imax$ – максимально допустимое количество итераций).

Скорость сходимости того или иного итерационного метода, как првило, определяется его порядком. Однако для решения конкретной прикладной задачи в первую очередь важно время нужное для её решения, а не количество итераций необходимое для его достижения. Поэтому в качестве критерия скорости сходимости того или иного итерационного процесса будем учитывать и время затраченное на решение.

Для реализации описанных выше итерационных схем с использованием гипер-дуальных чисел 3-го класса на языке C# составлен соответствующий программный код (см. Приложение 1). Процедура `CH(…)` реализирует методы методы Чебышева 2-го – 5-го порядков, а процедуры `ICH5(…)` осуществляют расчет по методу Чебышева-Хэлли 5-го порядка. Там же представлены процедуры, описывающие некоторые тестируемые функции. Статическая библиотека Sdn3Lib.dll выполняет поддержку гипер-дуальных чисел 3-го класса.

Численный эксперимент проводился на компьютере с операционной системой Microsoft Windows 10 Pro, CPU 3.40 GHz, при этом использовались тестируемые функции представленные в следующей таблице.

	Тестируемые функции	$\boldsymbol{x_0}$
1	$f_1(x) = (sin(x) - x/2)^2$	2.0
2	$f_2(x) = x^6 - 6x^5 + 50x^3 - 45x^2 - 108x + 108$	2.0

3	$f_3(x) = (x \cdot exp(x^2) - sin^2(x) + 3\,cos(x) + 5)^4$	-0.5
4	$f_4(x) = ln^2(x) \cdot (exp(x-3) - 1) \cdot \sin(\pi x/3)$	4.0
5	$f_5(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	4.0
6	$f_6(x) = x^5$	1.0
7	$f_7(x) = sin(cos(tg(sh(ch(th(x))))))$	1.5

Таблица 2. Список тестируемых функций

Результаты численного анализа приведены в таблицах 3 – 9.

Порядок	$\overline{x}$	$f(\overline{x})$	i	$t_{ms}10^2$
x_0=2.0				
2	1.895494267088440	0.000000000000000	30	0.93
3	1.895494267082750	0.000000000000000	21	0.56
4	1.895494267061890	0.000000000000000	18	0.51
5	1.895494267061830	0.000000000000000	18	1.06
5x2	1.895494267045520	0.000000000000000	13x2	0.61

Таблица 3. Сравнение методов для функции $f_1(x) = (sin(x) - x/2)^2$

Порядок	$\overline{x}$	$f(\overline{x})$	i	$t_{ms}10^2$
x_0=2.0				
2	2.999989905181720	0.000000000000000	26	0.78
3	2.999996142960440	0.000000000000000	20	0.52
4	2.999996954480880	0.000000000000000	24	0.63
5	2.999992213672730	0.000000000000000	17	1.23
5x2	2.999985131294850	0.000000000000000	13x2	0.65

Таблица 4. Сравнение методов для функции $f_2(x) = x^6 - 6x^5 + 50x^3 - 45x^2 - 108x + 108$

Порядок	$\overline{x}$	$f(\overline{x})$	i	$t_{ms}10^2$
x_0=-0.5				
2	-1.207647826887660	0.000000000000000	71	4.35

3	-1.207647826994720	0.000000000000000	50	2.98
4	-1.207647827023080	0.000000000000000	40	2.24
5	-1.207647827026480	0.000000000000000	37	2.98
5x2	-1.207647827086010	0.000000000000000	22x2	2.26

Таблица 5. Сравнение методов для функции $f_3(x) = (x \cdot exp(x^2) - sin^2(x) + 3\,cos(x) + 5)^4$

Порядок	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$f(\overline{\boldsymbol{x}})$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{t}_{ms}10^2$
x_0=4.0				
2	3.000000000281150	0.000000000000000	75	3.07
3	3.000000000179230	0.000000000000000	52	1.92
4	3.000000000094580	0.000000000000000	42	1.59
5	3.000000000106270	0.000000000000000	39	2.41
5x2	3.000000000059190	0.000000000000000	22x2	2.65

Таблица 6. Сравнение методов для функции $f_4(x) = ln^2(x) \cdot (exp(x-3) - 1) \cdot sin(\pi x/3)$

Порядок	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$f(\overline{\boldsymbol{x}})$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{t}_{ms}10^2$
x_0=4.0				
2	3.000000000000000	-0.000000000000004	6	0.31
3	3.000000000000000	-0.000000000000004	4	0.17
4	3.000000000000000	-0.000000000000004	4	0.15
5	3.000000000000000	-0.000000000000004	4	0.47
5x2	3.000000000000000	-0.000000000000004	3x2	0.18

Таблица 7. Сравнение методов для функции $f_5(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Порядок	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$f(\overline{\boldsymbol{x}})$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{t}_{ms}10^2$
x_0=1.0				
2	0.000000000397859	0.000000000000000	96	3.35
3	0.000000000198889	0.000000000000000	67	1.86
4	0.000000000129660	0.000000000000000	53	1.51
5	0.000000000140606	0.000000000000000	46	2.65

5x2	0.000000000061939	0.000000000000000	24x2	1.57

Таблица 8. Сравнение методов для функции $f_6(x) = x^5$

Порядок	$\overline{x}$	$f(\overline{x})$	i	$t_{ms}10^2$
x_0=1.5				
2	2.022988314672130	0.000000000000001	5	0.98
3	2.022988314672120	0.000000000000001	4	0.63
4	2.022988314672120	0.000000000000001	3	0.52
5	2.022988314672120	0.000000000000001	3	0.72
5x2	2.022988314672120	0.000000000000001	3x2	0.83

Таблица 9. Сравнение методов для функции $f_7(x) = sin(cos(tg(sh(ch(th(x))))))$

Анализ полученных результатов тестируемых функций по критериям количества итераций и быстродействия $\boldsymbol{t}_{ms}$ показал, что:

1) методы Чебышева 2-го 3-го порядков, а также Чебышева-Хэлли 5-го порядка не являются конкурентами для остальных рассматриваемых методов;
2) по минимальному количеству итераций лидером стал метод Чебышева 5-го порядка;
3) по минимально затраченному времени лидировал метод Чебышева 4-го порядка;

Очевидно, помимо всего прочего, быстродействие итерационного метода зависит от сложности функции цели и от количества обращений к ней и её производным на каждом шаге итерации.
Для тестируемых функций также выяснелось, что для метода Чебышева 5-го порядка учёт 4-й производной $f''''(x)$ практически не изменяет количество итераций.

В заключение отметим, что продуктивность метода Чебышева-Хэлли 5-го порядка может быть заметно улучшена, если его первый шаг заменить формулой Чебышева 3-го или 4-го порядка.

Приложение 1.

Исходный код на C#, использующий статическую библиотеку Sdn3Lib.dll.

```
using System;
using System.Diagnostics;
using Sdn3Lib;
```

```
const double δ = 1e-10;
const int maxIter = 1000;

enum order {
        order2,
        order3,
        order4,
        order5
}

struct tuple {
        public double x;    public sdn3 y;  public int i;
        public tuple(double value1, sdn3 value2, int value3){
            x = value1;
            y = value2;
            i = value3;
        }
}

//------------ методы Чебышева 2-го - 5-го порядков

tuple CH5(Func<double, sdn3> f, double x0, order order){
        int i = -1; double D = 0, D4 = 0.0, L = 0, M = 0, K = 0, Q = 0,
            h = 1e-10, x = x0, xl = 0; sdn3 F = f(x);
        double[] a = {0.5, 1/6, 5/8, 5/12};
        do
        {   xl = x;
            if (double.IsNaN(F.im1)) {return new tuple(xl, F, i);}
                D = F.re / F.im1; L = D * F.im2 / F.im1; M = L * L;
                K = D * D * F.im3 / F.im1;
            switch (order)
            {   case order.order2: x -= D; break;
                case order.order3: x -= (1.0 + a[0]*L)*D; break;
                case order.order4: x -= (1.0 + a[0]*(L+M)-K*a[1])*D; break;
                case order.order5:
                    D4 = (f(x + h).im3 - F.im3)/(h*F.im1); //-- optionally
                    Q = L * (a[2] * M - a[3] * K) + Math.Pow(D, 3) * D4;
                    x -= D*(1.0 + a[0] * (L + M) - K * a[1] + Q); break;
            }
            i += 1;
            if (i > maxIter || double.IsNaN(x)) break;
            F = f(x);
        } while (Math.Abs(x-xl) >= δ);
        return new tuple(x, F, i);

    }

//------------ двухшаговый метод Чебышева-Хэлли 5-го порядка
```

```
tuple ICH5(Func<double, sdn3> f, double x0)
    {
        int i = -1; double xi = x0, xl = 0;
        sdn3 F = new sdn3(); sdn3 Φ = new sdn3();
        double L, D, M;
        while (true)
        {   xl = xi;
            //-----STEP 1:
            i += 1;
            F = f(xi);  D = F.re / F.im1;  L = D * F.im2 / F.im1;
            xi -= (1.0 + 0.5 * L / (1.0 - L)) * D;
            //-----STEP 2:
            Φ = f(xi);
            M = L * (1.0 - Φ.re / F.re);
            xi -= (1.0 + M / (1.0 - M)) * Φ.re / F.im1;
            if (Math.Abs(xi-xl) <= δ || i > maxIter || double.IsNaN(xi))
               { break;}
        }
        return new tuple(xi, Φ, i);
    }

//------------ некоторые тестируемые функции

sdn3 f1(double x)
    {   var X = new sdn3(x, 1.0, 0.0, 0.0);
        var sX = (sdn3.sin(X) - 0.5 * X);
        return sX*sX;
    }

sdn3 f7 (double x)
    {   var X = new sdn3(x, 1.0, 0.0, 0.0);
        sdn3 th = sdn3.sh(X) / sdn3.ch(X);
        return sdn3.sin(sdn3.cos(sdn3.tg(sdn3.sh(sdn3.ch(th)))));
    }

//--------- вызовы методов CH5(...) и ICH5(...) с функциями f1(...) и f7(...)

        Stopwatch sw = Stopwatch.StartNew();
          var R1 = CH5 (f1, 2.0, Order.order5);
              sw.Stop();
          string t1 = (string)sw.Elapsed.TotalMilliseconds.ToString();
          var R7 = ICH5 (f7, 1.5);
              sw.Stop();
          string t7 = (string)sw.Elapsed.TotalMilliseconds.ToString();
          //--  R.x - root , f(R.x)= R.y.re,  R.i- iterations, t - ms
```

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарый С. П.* Курс вычислительных методов. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2015. – 507 с.

2. *Антонюк П.* О первой работе П. Л. Чебышева. – Научно-Исслед. Семинар по истории и методологии мат. и мех.: МГУ, 2014. –14 с.

3. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т.2 – Изд. Физико-математической литературы. – М: 1958. – 620 с.

4. *Jisheng Kou, Yitian Li.* The improvements of Chebyshev–Halley methods with fifth-order convergence. Applied Mathematics and Computation 188 (2007) 143–147.

5. *Олифер В. И.* Автоматическое дифференцирование на основе супер-дуальных чисел. – URL:http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/Автоматическое_дифференцирование_на_основе_супер-дуальных_чисел.pdf, 2020.

Абстракт

В данной публикации производится реализация и анализ быстродействия итерационных методов Чебышева 2-го – 5-го порядков и метода Чебышева-Хэлли 5-го порядка для решения нелинейных уравнений. Используется автоматическое дифференцирование со специальными дуальными чиселами (супер-дуальными чиселами 3-го класса). Представлена компьютерная реализация этого подхода для языка C# операционной системы Windows 10 Pro. Проведены численные эксперименты.

This publication presents the implementation and performance analysis of the 2nd-5th order Chebyshev iterative methods and the 5th order Chebyshev-Halley method for solving nonlinear equations. Automatic differentiation with special dual numbers (3rd class super-dual numbers) is used. A computer implementation of this approach for the C# language of the Windows 10 Pro operating system is presented. Numerical experiments are conducted.

Ключевые слова: *итерационные методы, автоматическое дифференцирование, супер-дуальные числа, iterative methods, automatic differentiation, super-dual numbers.*

---

20 марта 2025 г