О ДВУХ МОДИФИКАЦИЯХ МЕТОДА ЧЕБЫШЕВА-ХЭЛЛИ 5-ГО ПОРЯДКА

Олифер В.И.

Двухшаговой (двухточечный) метод Чебышева-Хэлли 5-го порядка был рассмотрен в работе [1]:

$i = 0, 1, 2, \ldots$

■ Первый шаг: $x_{i+1} = x_i - \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_i}{1 - L_i}\right] D_i,$

■ Второй шаг: $\tilde{x}_{i+1} = x_{i+1} - \left[1 + \frac{M_i}{1 - M_i}\right] \Gamma_i, \qquad x_{i+1} = \tilde{x}_{i+1},$ (1)

где: $D_i = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, $L_i = D_i \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}$, $M_i = L_i \left(1 - \frac{f(x_{i+1})}{f(x_i)}\right)$, $\Gamma_i = \frac{f(x_{i+1})}{f'(x_i)}$,

а $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ – исходная функция и её производные соответственно.

Первый шаг схемы (1) суть – супер-метод Хэлли третьего порядка[2], а второй шаг – это классический метод Ньютона с гипер-касательной в виде гиперболы [1].
Как видно, в двухшаговом методе каждая итерация состоит из последовательного применения двух методов. Причем результат первого метода используется для реализации второго метода. Поэтому одна итерация фактически является двойной итерацией.

Для реализации процедуры (1) на каждой итерации которой необходимо вычисление значений $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$.

Одним из конкурентов метода Чебышева-Хэлли 5-го порядка является метод Чебышева 5-го порядка [3, 4], который требует уже вычисления $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ и $f''''(x)$. Поэтому этот метод не получил практического применения.

Рассмотрим две модификации схемы (1) заменяя метод превого шага на метод Чебышева 3-го порядка:

$$x_{i+1} = x_i - \left[1 + \frac{L_i}{2}\right] D_i, \tag{2}$$

либо на метод Чебышева 4-го порядка [3, 4]:

$$x_{i+1} = x_i - \left[1 + \frac{L_i + L_i^2}{2} - \frac{K_i}{6}\right] D_i, \quad K_i = D_i^2 \frac{f'''(x_i)}{f'(x_i)} \tag{3}$$

Полученная схема (2) зависит от $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, а в схеме (3) еще и от $f'''(x)$.

При реализации схем (2) и (3) необходимо наличие простого и точного (с машинной точностью) способа определения значений производных разных порядков исходной функции $f(x)$. Это может быть успешно решено, если воспользоваться методом автоматического дифференцирования (АД) [5], суть которого заключается в создании нового типа данных и переопределения операций и базовых функций. В качестве такого нового типа данных могут быть исползованы гипер-дуальных чисел 3-го класса [5].

Гипер-дуальное число 3-го класса имеет представление в виде $Z = z + z_1\boldsymbol{\varepsilon} + z_2\boldsymbol{\omega} + z_3\boldsymbol{\gamma}$, $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{R}$. Параметр z называется главной (*Re* – действительной) частью гипер-дуального числа, а z_1, z_2, z_3 – его мнимыми (*Im1*, *Im2*, *Im3* – инфинитезимальными) частями. Абстрактные элементы $\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\gamma}$ образуют базис мнимых частей гипер-дуального числа, отвечающий следующими правилам: $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = 2\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\omega} = 3\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^2 = \boldsymbol{\omega}^2 = 0$. Алгебраические операции над дуальными числами 3-го класса определяются формулами:

$$
\begin{aligned}
&X = x + x_1\boldsymbol{\varepsilon} + x_2\boldsymbol{\omega} + x_3\boldsymbol{\gamma}, \qquad Y = y + y_1\boldsymbol{\varepsilon} + y_2\boldsymbol{\omega} + y_3\boldsymbol{\gamma},\\
&X + Y = x + y + (x_1 + y_1)\boldsymbol{\varepsilon} + (x_2 + y_2)\boldsymbol{\omega} + (x_3 + y_3)\boldsymbol{\gamma},\\
&X{\cdot}Y = x{\cdot}y + (x{\cdot}y_1 + y{\cdot}x_1)\boldsymbol{\varepsilon} + (x{\cdot}y_2 + 2x_1{\cdot}y_1 + y{\cdot}x_2)\boldsymbol{\omega} + (x{\cdot}y_3 + y{\cdot}x_3 + 3(x_1{\cdot}y_2\\
&\qquad\qquad + y_1{\cdot}x_2))\boldsymbol{\gamma},\\
&Y^{-1} = y^{-1} - y^{-2}{\cdot}y_1\boldsymbol{\varepsilon} + y^{-2}(2{\cdot}y_1^2{\cdot}y^{-1} - y_2)\boldsymbol{\omega} + a^{-2}(6y_1{\cdot}y^{-1}(y_2 - y_1^2{\cdot}y^{-1}) - y_3)\boldsymbol{\gamma},\\
&X/Y = X{\cdot}Y^{-1},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

а функция гипер-дуального аргумента 3-го класса, после ее разложения в ряд Тейлора, имеет вид

$$
\begin{aligned}
F(X) = f(x) + x_1 f'(x)\boldsymbol{\varepsilon} + [x_2 f'(x) + x_1^2 f''(x)]\boldsymbol{\omega} +\\
+ [x_3 f'(x) + 3x_1x_2 f''(x) + x_1^3 f'''(x)]\boldsymbol{\gamma}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

При $x_1 = 1$ и $x_2 = x_3 = 0$ соотношение (5) принимает форму:

$$F(x + \boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} + 0\boldsymbol{\gamma}) = f(x) + f'\boldsymbol{\varepsilon} + f''(x)\boldsymbol{\omega} + f'''(t)\boldsymbol{\gamma}, \quad f(x) = F(x + 0\boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} + 0\boldsymbol{\gamma}),$$

что позволяет представить производные функции $f(x)$, входящие в (2) и (3), следующим образом

$$f'(x) = F(X).Im1,\ \ f''(x) = F(X).Im2,\ \ f'''(x) = F(X).Im3,$$

где: $X = x + \boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} + 0\boldsymbol{\gamma}$, $F(X)$ – целевая функция $f(x)$, записанная в терминах гипер-дуальных чисел 3-го класса.

Важным местом в любом итерационном процессе значится критерий его окончания. К сожалению, нет универсального рецепта в этом вопросе. Обычно в качестве этого критерия используется одно из следующих неравенств: $\|f(x_i)\| \leq \delta$; $\|x_i - x_{i-1}\| \leq \delta$; $i \geq Imax$ (δ – заданная малая величина, $Imax$ – максимально допустимое количество итераций).

Для реализации схемы (1) и при замене её первого шага на (2) или (3) (с использованием гипер-дуальных чисел 3-го класса) на языке C# составлен соответствующий программный код (см. Приложение 1). Процедура `ICH5x(…)` осуществляют расчет по методу Чебышева-Хэлли 5-го порядка с учётом (2) или (3). Там же представлены процедуры, описывающие некоторые тестируемые функции. Статическая библиотека Sdn3Lib.dll выполняет поддержку гипер-дуальных чисел 3-го класса.

Численный эксперимент проводился на компьютере с операционной системой Microsoft Windows 10 Pro, CPU 3.40 GHz, при этом использовались тестируемые функции представленные в следующей таблице.

	Тестируемые функции	$\boldsymbol{x_0}$
1	$f_1(x) = (sin(x) - x/2)^2$	2.0
2	$f_2(x) = x^6 - 6x^5 + 50x^3 - 45x^2 - 108x + 108$	2.0
3	$f_3(x) = (x \cdot exp(x^2) - sin^2(x) + 3\,cos(x) + 5)^4$	-0.5
4	$f_4(x) = ln^2(x) \cdot (exp(x-3) - 1) \cdot \sin(\pi x/3)$	4.0
5	$f_5(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	4.0
6	$f_6(x) = x^5$	1.0
7	$f_7(x) = sin(cos(tg(sh(ch(th(x))))))$	1.5

Таблица 2. Список тестируемых функций

Результаты численного анализа приведены в таблицах 3 – 9.

Схема	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$f(\overline{\boldsymbol{x}})$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{t}_{ms}10^2$
x_0=2.0				
1	1.895494267088440	0.000000000000000	13	1.04
2	1.895494267082750	0.000000000000000	15	0.72
3	1.895494267061890	0.000000000000000	14	0.69

Таблица 3. Сравнение методов для функции $f_1(x) = (sin(x) - x/2)^2$

Схема	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	i	$t_{ms}10^2$
x_0=2.0				
1	2.999985131294850	0.000000000000000	13	1.01
2	2.999989156733730	0.000000000000000	37	2.53
3	2.999985584355330	0.000000000000000	9	0.63

Таблица 4. Сравнение методов для функции $f_2(x) = x^6 - 6x^5 + 50x^3 - 45x^2 - 108x + 108$

Схема	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	i	$t_{ms}10^2$
x_0=-0.5				
1	-1.207647827101030	0.000000000000000	20	2.29
2	-1.207647827245150	0.000000000000000	35	4.27
3	-1.207647827238790	0.000000000000000	32	2.24

Таблица 5. Сравнение методов для функции $f_3(x) = (x \cdot exp(x^2) - sin^2(x) + 3\,cos(x) + 5)^4$

Схема	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	i	$t_{ms}10^2$
x_0=4.0				
1	3.000000000059190	0.000000000000000	22	3.07
2	3.000000000114480	0.000000000000000	36	3.06
3	3.000000000105000	0.000000000000000	33	2.77

Таблица 6. Сравнение методов для функции $f_4(x) = ln^2(x) \cdot (exp(x-3) - 1) \cdot sin(\pi x/3)$

Схема	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	i	$t_{ms}10^2$
x_0=4.0				
1	3.000000000000000	-0.000000000000004	3	0.28
2	3.000000000000000	-0.000000000000004	3	0.23
3	3.000000000000000	0.000000000000000	3	0.21

Таблица 7. Сравнение методов для функции $f_5(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Схема	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$f(\overline{\boldsymbol{x}})$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{t}_{ms}10^2$
x_0=1.0				
1	0.000000000061939	0.000000000000000	24	2.89
2	0.000000000168599	0.000000000000000	45	2.88
3	0.000000000171593	0.000000000000000	41	2.86

Таблица 8. Сравнение методов для функции $f_6(x) = x^5$

Схема	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$f(\overline{\boldsymbol{x}})$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{t}_{ms}10^2$
x_0=1.5				
1	2.022988314672120	0.000000000000001	3	1.05
2	2.022988314672120	0.000000000000001	3	0.80
3	2.022988314672120	0.000000000000001	2	0.59

Таблица 9. Сравнение методов для функции $f_7(x) = sin(cos(tg(sh(ch(th(x))))))$

Анализ полученных результатов тестируемых функций по критериям количества итераций и быстродействия $\boldsymbol{t}_{ms}$ показал, что:

1) методы Чебышева-Хэлли 5-го порядка с учётом (2) не являются конкурентами для остальных рассматриваемых схем;
2) количество итераций по итерацинной схеме (3) не больше чем по исходной схеме (1), а в некоторых случаях даже меньше;
3) по минимально затраченному времени лидировал метод Чебышева-Хэлли 5-го порядка с учётом (3);

Очевидно, помимо всего прочего, быстродействие итерационного метода зависит от сложности функции цели и от количества обращений к ней и её производным на каждом шаге итерации. Но несомненно, использование автоматического дифференцирования на основе гипер-дуальных чисел 3-го класса полностью снимает вопрос точного вычисления (с машинной точностью) производных $f'(x)$, $f''(x)$, и $f'''(x)$ для сколь угодно сложной исходной функции $f(x)$.

Приложение 1.

Исходный код на C#, использующий статическую библиотеку Sdn3Lib.dll.

```
using System;
using Sdn3Lib;
```

```
using System.Diagnostics;
private const double δ = 1e-10;
private const int maxIter = 1000;
public enum Order
    {   order3,
        order4
    }

struct tuple
    {   public double x;
        public sdn3 y;
        public int i;
        public tuple(double value1, sdn3 value2, int value3)
        {   x = value1;
            y = value2;
            i = value3;
        }
    }

tuple ICH5x(Func<double, sdn3> f, double x0, Order order)
    {
        int i = -1; double xi = x0, xl = 0;
        sdn3 F = new sdn3(); sdn3 Φ = new sdn3();
        double D, L, M, K;
        while (true)
        {
            xl = xi;
            //-----STEP 1:
            i += 1;
            F = f(xi);
            D = F.re / F.im1;
            L = D * F.im2 / F.im1;
            if (order == Order.order4)
            {   K = D * D * F.im3 / F.im1;
                xi -= (1.0 + 0.5 * (L + L * L) - K / 6.0) * D;
            }
            else {xi -= (1.0 + 0.5 * L) * D; }  //order 3
            //-----STEP 2:
            Φ = f(xi);
            if (Math.Abs(xi-xl)<=δ || i>maxIter || double.IsNaN(xi)) {break;}
            M = L * (1.0 - Φ.re / F.re);
            xi -= (1.0 + M / (1.0 - M)) * Φ.re / F.im1;
        }
        return new tuple(xi, Φ, i);
    }

//------------ some tested functions

sdn3 f1(double x)
    {   var X = new sdn3(x, 1.0, 0.0, 0.0);
```

```
        var sX = (sdn3.sin(X) - 0.5 * X);
        return sX*sX;
    }

sdn3 f7 (double x)
     {   var X = new sdn3(x, 1.0, 0.0, 0.0);
         sdn3 th = sdn3.sh(X) / sdn3.ch(X);
         return sdn3.sin(sdn3.cos(sdn3.tg(sdn3.sh(sdn3.ch(th)))));
     }

//--------- call method ICH5x(...) with functions f1(...) and f7(...)

        Stopwatch sw = Stopwatch.StartNew();
          var R1 = ICH5x (f1, 2.0, Order.order4);
              sw.Stop();
          string t1 = (string)sw.Elapsed.TotalMilliseconds.ToString();
          var R7 = ICH5x (f7, 1.5, , Order.order4);
              sw.Stop();
          string t7 = (string)sw.Elapsed.TotalMilliseconds.ToString();
         //--  R.x - root , f(R.x)= R.y.re,  R.i- iterations, t - ms
```

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jisheng Kou, Yitian Li.* The improvements of Chebyshev–Halley methods with fifth-order convergence. Applied Mathematics and Computation 188 (2007) 143–147.

2. *H.H.H. Homeier*. On Newton-type methods with cubic convergence, J. Comput. Appl. Math. 176 (2005) 425–432.

3. *Антонюк П.* О первой работе П. Л. Чебышева. – Научно-Исслед. Семинар по истории и методологии мат. и мех.: МГУ, 2014. –14 с.

4. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т.2 – Изд. Физико-математической литературы. – М: 1958. – 620 с.

5. *Олифер В. И.* Автоматическое дифференцирование на основе супер-дуальных чисел. – URL:http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/Автоматическое_дифференцирование_на_основе_супер-дуальных_чисел.pdf, 2020.

Абстракт

В данной публикации производится две модификации метода Чебышева-Хэлли 5-го порядка. Используется автоматическое дифференцирование со специальными дуальными числами (супер-дуальными числами 3-

го класса). Представлена компьютерная реализация этого подхода для языка C# операционной системы Windows 10 Pro. Проведены численные эксперименты.

In this publication, two modifications of the Chebyshev-Halley method of the 5th order are made. Automatic differentiation with special dual numbers (super-dual numbers of the 3rd class) is used. A computer implementation of this approach for the C# language of the Windows 10 Pro operating system is presented. Numerical experiments are carried out.

Ключевые слова: *итерационные методы, автоматическое дифференцирование, супер-дуальные числа, iterative methods, automatic differentiation, super-dual numbers.*

---

20 апреля 2025 г