

К РАЦИОНАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Олифер В.И.

Обобщенное дуальное число K -го порядка (Generalized Dual Number - $\mathbb{G}_K$) определяется формулой [1]:

$$X_{[K]} = x + \sum_{i=1}^K x_i v_i: \quad \forall x, x_i \in \mathbb{R}; \quad \forall X_{[K]} \in \mathbb{G}_K \quad (1)$$

где: K – порядок обобщенного дуального числа; v_i – базис мнимых частей обобщенного дуального числа, который ассоциативен и коммутативен по операции умножения. Параметр x называется главной (Re – действительной) частью обобщенного дуального числа, а x_i – его мнимыми (Im_i – инфинитезимальными) частями. Хотя ранее в работе [2] такие числа уже были рассмотрены и названы супер-дуальными числами. Далее будем придерживаться терминологии работы [1].

Используя биномиальную теорему можно получить формулу перемножения обобщенных дуальных чисел (1):

$$X_{[K]} \cdot Y_{[K]} = x \cdot y + \sum_{i=1}^K \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x_j y_{i-j} v_i \quad (2)$$

где: $\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Применение соотношения (2) напрямую громоздко и неудобно при численной реализации. Однако, на основе (2) можно получить таблицу умножения элементов мнимого базиса по следующей формуле:

$$v_i v_j = \begin{cases} \frac{(i+j)!}{i! j!} v_{i+j}, & \forall (i+j) \leq K \\ 0, & \forall (i+j) > K \end{cases} \quad (3)$$

Для примера, ниже представлена таблица умножения элементов базиса мнимых частей $v_i v_j$ обобщенных дуальных чисел 7-го порядка.

$\times$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	$2v_2$	$3v_3$	$4v_4$	$5v_5$	$6v_6$	$7v_7$	0
v_2	$3v_3$	$6v_4$	$10v_5$	$15v_6$	$21v_7$	0	0

v_3	$4v_4$	$10v_5$	$20v_6$	$35v_7$	0	0	0
v_4	$5v_5$	$15v_6$	$35v_7$	0	0	0	0
v_5	$6v_6$	$21v_7$	0	0	0	0	0
v_6	$7v_7$	0	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 1. Умножение элементов мнимого базиса обобщенных дуальных чисел 7-го порядка

Таблица умножения элементов мнимого базиса симметрична относительно диагонали, проведенной из её верхнего левого угла, а главная диагональ и всё что ниже её состоит только из нулевых элементов. Каждая i -я диагональ, проведенная справа налево и вниз, имеет одинаковый отклик v_{i+1} . Коэффициенты же при v_{i+1} – суть биномиальные коэффициенты, образующие прямоугольный треугольник Паскаля¹ без его первой единичной строки и первого единичного столбца. Поэтому для конкретного порядка K обобщенных дуальных чисел нет необходимости применять формулы (2) или (3), а достаточно использовать треугольник Паскаля, который фактически является таблицей коэффициентов умножения ненулевых элементов мнимого базиса любого порядка обобщенных дуальных чисел. Нулевые элементы таблицы умножения следуют условию $v_i v_j = 0, \forall (i + j) > K$.

Алгебра $\mathbb{G}_K$ обобщенных дуальных чисел

Пространство обобщенных дуальных чисел K -го порядка отвечает $(K + 1)$ -мерной коммутативно-ассоциативной алгебре над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, содержащей делители нуля, с соответствующим правилом умножения элементов базиса $\{1, v_1, v_2, \dots, v_K\}$ (см. предыдущий раздел). Такая алгебра определяет следующие операции над обобщенными дуальными числами K -го порядка:

сложение и вычитание	$X_{[K]} \pm Y_{[K]} = x \pm y \pm \sum_{i=1}^K (x_i \pm y_i) v_i,$
умножение	$X_{[K]} \cdot Y_{[K]} = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^i \delta_{ij} x_i y_j v_{i+j}, \quad \forall x_0 = x, y_0 = y, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} \binom{i-j}{j}, & i+j \leq K, \\ 0, & i+j > K \end{cases},$
деление	$\frac{X_{[K]}}{Y_{[K]}} = X_{[K]} \cdot Y_{[K]}^{-1},$

¹) Этот треугольник в России, Франции и англоязычных странах носит название треугольник Паскаля, в Германии – треугольник Стифеля, а в Италии – треугольник Тарталья. История этого треугольника охватывает множество культур и эпох.

обращение	$Y_{[K]}^{-1}$ находится из условия $Y_{[K]} \cdot Y_{[K]}^{-1} = One$,
-----------	--

а также имеет единичный и нулевой элементы:

$$One = 1 + \sum_{i=1}^K 0 \mathbf{v}_i, \quad Zero = 0 + \sum_{i=1}^K 0 \mathbf{v}_i$$

Величины $P(X_{[K]}) = 1 + \sum_{i=1}^K x_i \mathbf{v}_i$ являются полюсами обобщенных дуальных чисел K -го порядка.

Результат обращения $Y_{[K]}^{-1}$, а значит и деления $X_{[K]}/Y_{[K]}$ представляет собой обобщенные дуальные числа с коэффициентом y^{-1} при его главной части и разные степени этого коэффициента в мнимых частях. Тогда, хотя $Y_{[K]} = 0 + \sum_{i=1}^K y_i \mathbf{v}_i \neq Zero$, операции обращения $Y_{[K]}^{-1}$ и деления $X_{[K]}/Y_{[K]}$ недопустимы. Величины $Y_{[K]} = 0 + \sum_{i=1}^K y_i \mathbf{v}_i$ называются делителями нуля.

Такая алгебра иногда называется $(K-1)$ -мерной векторной алгеброй K -мерного пространства.

Функция обобщенного дуального аргумента

Для определения функции обобщенного дуального аргумента K -го порядка, разложим её в ряд Тейлора:

$$F(x + \Delta_{[K]}) = \sum_{i=0}^K \frac{1}{i!} f^{(i)}(x) \Delta_{[K]}^i, \quad (4)$$

где: $f^{(i)}(x)$ – производная i – го порядка функции $f(x)$; $\Delta_{[K]}^i = \left(\sum_{j=1}^K x_j \mathbf{v}_j \right)^i$.

Если положить $X_{[K]} = x + \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^K (0 \cdot \mathbf{v}_i)$, то соотношение (4) принимает вид:

$$F(X_{[K]}) = f(x) + \sum_{i=1}^K f^{(i)}(x) \mathbf{v}_i, \quad \forall f(x) = F\left(x + \sum_{i=1}^K 0 \cdot \mathbf{v}_i\right) \quad (5)$$

Из найденного соотношения (5) легко получить значения производных функции $f(x)$ от 1-го до K -го порядка включительно: $f^{(i)}(x) = F(X_{[K]}) \cdot Im_i$.

Соотношения (4) и (5) показывают, что областями определения и значения функции $F(X_{[K]})$ являются обобщенные дуальные числа K -го порядка, а значит на них распространяется алгебра этих чисел. Для аналитических функций обобщенного

дуального аргумента K -го порядка сохраняются все формулы и теоремы дифференциального исчисления.

Алгебраические уравнения

Рассмотрим алгебраическое уравнение n -й степени в терминах обобщённых дуальных чисел K -го порядка:

$$\Phi(X_{[K]}) = \sum_{i=0}^n A_i X_{[K]}^i = \sum_{i=0}^n \left[\left(a_{0i} + \sum_{j=1}^K a_{ji} v_j \right) \prod_0^i \left(x + \sum_{j=1}^K x_j v_j \right) \right] = Zero \quad (6)$$

Корни такого уравнения (величины с верхним индексом $*$), вообще говоря, суть обобщённые дуальные числа K -го порядка. После разделения главной и мнимых частей $F(X_{[K]})$ получится система $K + 1$ уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi(X_{[K]}) \cdot Re &= 0 && \mapsto x^* \\ \Phi(X_{[K]}) \cdot Im_1 \Big|_{x^*} &= 0 && \mapsto x_1^* \\ \Phi(X_{[K]}) \cdot Im_2 \Big|_{x^*, x_1^*} &= 0 && \mapsto x_2^* \\ \dots & \dots && \dots \\ \Phi(X_{[K]}) \cdot Im_K \Big|_{x^*, \dots, x_K^*} &= 0 && \mapsto x_K^* \end{aligned} \quad (7)$$

Причем в главную часть $\Phi(X_{[K]}) \cdot Re$ будут входить только x разных степеней, в 1-ю мнимую часть – разные степени x и только первая степень x_1 , во 2-ю мнимую часть – разные степени x, x_1 и только первая степень x_2 и т.д. Иными словами каждая i -я мнимая часть линейна относительно x_i и нахождение её корня кажется весьма тривиально. Проблема связана с нахождением корня вещественной главной части x^* , который входит во все мнимые части. Во-первых, уравнение 5-й степени и выше, вообще говоря, неразрешимо в радикалах (теорема Абеля-Руффини). Во-вторых, для степеней $2 \div 4$ корень может быть вещественным или комплексным. Комплексный корень не следует учитывать, если дискриминант уравнения главной части равен нулю. Если степень многочлена главной части выше 4-х, то для его решения следует использовать те или иные численные итерационные методы.

По найденным x^* и x_i^* уже можно записать обобщенный дуальный корень исходного уравнения:

$$R = x^* + \sum_{i=1}^K x_i^* v_i \quad (8)$$

Следует заметить, что корни уравнений мнимых частей x_i^* являются значениями производных i -го порядка функции $\varphi(x) = \Phi(x + \sum_{i=1}^K 0 v_i)$.

Принцип перенесения

В конце XIX века А. П. Котельников фактически использовал дуальные числа для развития теории винтов, которая нашла широкое применение в различных разделах физики, механики, геометрии. Им был предложен принцип (утверждение сформированное на основе экспериментов и наблюдений) или метод перенесения (соответствия), который в упрощенном виде может быть сформулирован так: «Решение, полученное на множестве вещественных чисел, может быть перенесено в область дуальных чисел путем замены вещественных чисел и функций на дуальные числа и соответствующие функции дуального аргумента». Этот принцип остаётся справедливым и для обобщенных дуальных чисел любого K -го порядка. Пример использования принципа перенесения на базе обобщенных дуальных чисел 2-го порядка $\mathbb{G}_2$ можно найти в [3].

Развёрнутая форма обобщенных дуальных чисел 4-го порядка

Алгебраические операции над обобщенными дуальными числами порядка 4-го порядка $\mathbb{G}_4$ представляются формулами:

$$\begin{aligned} X &= x + x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4, & Y &= y + y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 + y_4 v_4, \\ X + Y &= x + y + (x_1 + y_1) v_1 + (x_2 + y_2) v_2 + (x_3 + y_3) v_3 + (x_4 + y_4) v_4, \\ X \cdot Y &= x \cdot y + (x \cdot y_1 + y \cdot x_1) v_1 + (x \cdot y_2 + 2x_1 \cdot y_1 + y \cdot x_2) v_2 + (x \cdot y_3 + y \cdot x_3 + \\ &\quad + 3(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)) v_3 + (x y_4 + x_4 y + 6x_2 y_2 + 4(x_1 y_3 + x_3 y_1)) v_4, \\ X/Y &= X \cdot Y^{-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$Y^{-1} = z + z_1 v_1 + z_2 v_2 + z_3 v_3 + z_4 v_4,$$

$$\text{где: } z = y^{-1}, \quad z_1 = -z^2 y_1, \quad z_2 = -z(z y_2 + 2z_1 y_1), \quad z_3 = -z(z y_3 + 3(z_1 y_2 + \\ + z_2 y_1)), \quad z_4 = -z(z y_4 + 6z_2 y_2 + 4(z_1 y_3 + z_3 y_1))$$

Разложение функции от обобщенного дуального числа 4-го порядка в ряд Тейлора имеет вид:

$$F(x + \Delta) = f(x) + \Delta \cdot f'(x) + \Delta^2 \cdot f''(x)/2 + \Delta^3 \cdot f'''(x)/6 + \Delta^4 \cdot f^{IV}(x)/24, \tag{10}$$

$$\text{где: } \Delta = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4, \quad \Delta^2 = 2x_1^2 v_2 + 6x_1 x_2 v_3 + (8x_1 x_3 + 6x_2^2) v_4,$$

$$\Delta^3 = 6x_1^3 v_3 + 36x_1^2 x_2 v_4, \quad \Delta^4 = 24x_1^4 v_4$$

Постановку Δ , Δ^2 , Δ^3 и Δ^4 в (10) даёт:

$$\begin{aligned} F(X) = & f(x) + x_1 f'(x) v_1 + [x_2 f'(x) + x_1^2 f''(x)] v_2 + \\ & + [x_3 f'(x) + 3x_1 x_2 f''(x) + x_1^3 f'''(x)] v_3 + \\ & + [x_4 f'(x) + (4x_1 x_3 + 3x_2^2) f''(x) + 6x_1^2 x_2 f'''(x) + x_1^4 f^{IV}(x)] v_4 \end{aligned} \quad (11)$$

При $x_1 = 1$ и $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ соотношение (11) принимает форму:

$$F(x + v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4) = f(x) + f'v_1 + f''(x)v_2 + f'''(x)v_3 + f^{IV}(x)v_4,$$

$$\forall f(x) = F(x + 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4),$$

из которой следует: $f(x) = F(X).Re$, $f'(x) = F(X).Im_1$, $f''(x) = F(X).Im_2$, $f'''(x) = F(X).Im_3$, $f^{IV}(x) = F(X).Im_4$.

Автоматическое дифференцирование

Традиционные способы вычисления производной функции $f'(x)$ на практике сопряжены с трудностями и имеют существенные недостатки. Реализация вычислений $f'(x)$ в виде отдельной программной процедуры является избыточным решением и нуждается в предварительном анализе $f(x)$. Использование метода конечных разностей требует компромисса между погрешностями усечения и округления, т. е. нахождения оптимальной величины приращения аргумента x . Более того, задача численного дифференцирования является некорректной и ее нужно решать методами регуляции [4]. Еще большие проблемы возникают при вычислении производных более высоких порядков, особенно для сложных функций, например, $f(x) = f(f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(\dots)))))$.

Обойти указанные трудности позволяет метод автоматического дифференцирование (AD), связанный с вычислением значений производных функции с машинной точностью, представленной компьютерным кодом [5]. Этот метод является фундаментальным инструментом в задачах, связанных с оптимизацией, нелинейными уравнениями, дифференциальными уравнениями, анализе чувствительности и т. д.

Для компьютерной реализации AD необходимо создать новый тип данных, перезагрузить базовые (элементарные) функции и операции над ними. Если новый тип данных строится на основе $\mathbb{G}_K$, то за одно обращение к перезагруженной базовой функции точно (вплоть до погрешности округления) вычисляются значения самой функции и ее производных вплоть до K -го порядка включительно.

Пример AD на основе $\mathbb{G}_4$

Вкратце рассмотрим итерационный метод Чебышева П. Л. 5-го порядка для решения нелинейных уравнений [6].

Расчетная схема одношаговой (одноточечной) численной реализации эталонной итерационной формулы Чебышева 5-го порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{i+1} = x_i - D_i - \frac{1}{2} (D_i)^2 \left[\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \right] - (D_i)^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{f'''(x_i)}{f'(x_i)} \right] \\ - (D_i)^4 \left[\frac{5}{8} \left(\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \right)^3 - \frac{5}{12} \frac{f''(x_i)f'''(x_i)}{f'(x_i)^2} + \frac{f^{IV}(x_i)}{f'(x_i)} \right] = \\ = x_i - D_i \left[1 + \frac{1}{2} (L_i + M_i) - \frac{1}{6} K_i + Q_i \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где: $D_i = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, $L_i = D_i \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}$, $M_i = L_i^2$, $K_i = D_i^2 \frac{f'''(x_i)}{f'(x_i)}$,
 $Q_i = D_i^3 * \left[\frac{L_i}{D_i^3} \left(\frac{5}{8} M_i - \frac{5}{12} K_i \right) + \frac{f^{IV}(x_i)}{f'(x_i)} \right]$, $\forall i = 0, 1, 2, \dots$

Итерационная схема (12) получена путем разложения в ряд Тейлора функции обратной к исходной $f(x)$. По мнению самого Чебышева П. Л. этот путь является наиболее естественным и общим для разработки итерационных схем. Удержание разных членов в (12) дает формулы для методов Чебышева со 2-го по 5-й порядок. Главный недостаток метода (12) состоит в том, что в нём участвуют производные функции $f(x)$ с 1-го до 4-го порядка, вычисление которых в общем случае весьма весьма затруднительно, а иногда просто невозможно.

Решение этой проблемы можно осуществить путем использования AD на базе обобщенных дуальных чисел 4-го порядка $\mathbb{G}_4$ (см. выше). Для этих целей в [6] на языке C# была разработана статическая библиотека [Sdn4Lib.dll](#), которая включает переопределение операций $+$, $-$, $*$, $\div$ и основных базовых функций `pow(...)`, `powX(...)`, `exp(...)`, `ln(...)`, `log(...)`, `sqrt(...)`, `sin(...)`, `cos(...)`, `sh(...)`, `ch(...)`, возвращающих гипер-дуальные числа 4-го порядка. Размер библиотеки [Sdn4Lib.dll](#) составляет всего 7 kb.

В [6] также дан программный код на языке C#, реализующий итерационную формулу (12). При этом, вычисление значений производных требует всего одно обращение к исходной функции, записанной в терминах обобщенных дуальных чисел 4-го порядка:

$$f'(x_i) = F(X_i).Im1, \quad f''(x_i) = F(X_i).Im2, \quad f'''(x_i) = F(X_i).Im3, \quad f^{IV}(x_i) = F(X_i).Im4$$

Результаты численного эксперимента см. в выше цитированной работе [6].

Векторизованный вариант $\mathbb{G}_3$

Обобщенный дуальный вектор третьего порядка определяется формулой:

$$\mathbf{R} = \vec{r} + \sum_{i=1}^3 \vec{r}_i v_i = \sum_{n=1}^3 \left(r_n + \sum_{m=1}^3 r_{nm} v_m \right) \vec{e}_n = \sum_{n=1}^3 R_n \vec{e}_n, \quad (13)$$

где: $\vec{r}$ – полярный или аксиальный (псеудо) вектор; $\vec{r}_i$ – аксиальные векторы i -го порядка;
 R_n – обобщенные дуальные числа 3-го порядка $\mathbb{G}_3$.

Полярный вектор $\vec{r}$ – вектор у которого все плоскости симметрии лежат на нем, но плоскости перпендикулярные ему не являются плоскостями симметрии (перемещение, скорость, сила, ускорение, электрическое поле и т. д.).

Аксиальный вектор $\vec{r}$ – вектор у которого все плоскости симметрии лежат на нем, а также плоскости перпендикулярные ему являются плоскостями симметрии (угол поворота, угловая скорость, момент силы, магнитная индукция и т. д.).

В декартовой системе координат ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) полярный и аксиальный векторы задаются соотношениями:

$$\vec{r} = \sum_{n=1}^3 r_n \vec{e}_n, \quad \vec{r} = \sum_{n=1}^3 \tilde{r}_n \vec{e}_n: \quad r_n, \tilde{r}_n \in \mathbb{R}, \quad \vec{e}_n - \text{ортогональный базис.}$$

Операции над полярными и аксиальными векторами даны в следующей таблице.

Операция ($\circ$)	$\vec{r} \circ \vec{q}$	$\vec{r} \circ \vec{q}$	$\vec{r} \circ \vec{q}$
Сложение	$\vec{r} + \vec{q} = \vec{n}$	$\vec{r} + \vec{q} = \vec{m}$	Нет смысла ²
Скалярное произведение	$\vec{r} \cdot \vec{q} = \alpha$	$\vec{r} \cdot \vec{q} = \alpha$	$\vec{r} \cdot \vec{q} = \beta$
Векторное произведение	$\vec{r} \times \vec{q} = \vec{m}$	$\vec{r} \times \vec{q} = \vec{m}$	$\vec{r} \times \vec{q} = \vec{n}$
Смешанное произведение	$(\vec{r} \times \vec{q}) \cdot \vec{t} = \alpha$	$(\vec{r} \times \vec{q}) \cdot \vec{t} = \beta$	$(\vec{r} \times \vec{q}) \cdot \vec{t} = \alpha$
Приведение к полюсу	$\vec{r} + \vec{\rho} \times \vec{r} = \vec{m}$		

Таблица 2. Операции над полярными и аксиальными векторами
 ($\vec{\rho}$ – радиус-вектор полюса, α – константа, β – псевдоконстанта)

²) Сложение полярного и аксиального векторов – математически возможно, но физически и геометрически не имеет смысла в большинстве контекстов (результат не будет ни полярным, ни аксиальным).

Процедуры вычисления скалярного и векторного произведений обеих типов, указанных выше векторов, ничем не отличаются (φ – угол между исходными векторами):

$$\vec{r} \cdot \vec{q} = |\vec{r}| |\vec{q}| \cos(\varphi), \quad \vec{r} \cdot \vec{q} = |\vec{r}| |\vec{q}| \cos(\varphi), \quad \vec{r} \cdot \vec{q} = |\vec{r}| |\vec{q}| \cos(\varphi),$$

$$\vec{r} \times \vec{q} = |\vec{r}| |\vec{q}| \sin(\varphi), \quad \vec{r} \times \vec{q} = |\vec{r}| |\vec{q}| \sin(\varphi), \quad \vec{r} \times \vec{q} = |\vec{r}| |\vec{q}| \sin(\varphi),$$

$$\text{где: } \vec{r} = \sum_{n=1}^3 r_n \vec{e}_n, \quad \vec{q} = \sum_{n=1}^3 q_n \vec{e}_n, \quad |\vec{r}| = \left[\sum_{n=1}^3 r_n^2 \right]^{1/2}, \quad |\vec{q}| = \left[\sum_{n=1}^3 q_n^2 \right]^{1/2}$$

С другой стороны

$$\vec{r} \cdot \vec{q} = \sum_{n=1}^3 r_n q_n = r_1 q_1 + r_2 q_2 + r_3 q_3,$$

$$\vec{r} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = (r_2 q_3 - r_3 q_2) \vec{e}_1 + (r_3 q_1 - r_1 q_3) \vec{e}_2 + (r_1 q_2 - r_2 q_1) \vec{e}_3,$$

$$(\vec{r} \times \vec{q}) \cdot \vec{t} = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = (r_2 q_3 - r_3 q_2) t_1 + (r_3 q_1 - r_1 q_3) t_2 + (r_1 q_2 - r_2 q_1) t_3$$

Из приведенных выше соотношений можно определить величину угла φ между векторами $\vec{r}$ и $\vec{q}$, например, $\varphi = \arccos([r_1 q_1 + r_2 q_2 + r_3 q_3] / |\vec{r}| |\vec{q}|)$.

Условие компланарности векторов (лежат на одной плоскости) $\vec{r}$, $\vec{q}$ и $\vec{t}$: $(\vec{r} \times \vec{q}) \cdot \vec{t} = 0$. Если $\vec{t} \cdot (\vec{r} \times \vec{q}) \neq 0$, то векторы $\vec{t}$, $\vec{r}$ и $\vec{q}$ образуют базис ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$).

Учитывая алгебру обобщенных дуальных чисел 3-го порядка [2] ($\mathbf{v}_1^2 = 2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3^2 = \mathbf{v}_2^2 = 0$):

$$X + Y = x + y + (x_1 + y_1) \mathbf{v}_1 + (x_2 + y_2) \mathbf{v}_2 + (x_3 + y_3) \mathbf{v}_3,$$

$$X \cdot Y = x \cdot y + (x \cdot y_1 + y \cdot x_1) \mathbf{v}_1 + (x \cdot y_2 + 2x_1 \cdot y_1 + y \cdot x_2) \mathbf{v}_2 + (x \cdot y_3 + y \cdot x_3 + 3(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)) \mathbf{v}_3,$$

и структуру соотношения (13) можно записать алгебру обобщенных дуальных векторов 3-го порядка в терминах обобщенных дуальных чисел 3-го порядка:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} + \mathbf{Q} &= \sum_{n=1}^3 (R_n + Q_n) \vec{e}_n, & \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q} &= \sum_{n=1}^3 (R_n \cdot Q_n), \\ \mathbf{R} \times \mathbf{Q} &= (R_2 \cdot Q_3 - R_3 \cdot Q_2) \vec{e}_1 + (R_3 \cdot Q_1 - R_1 \cdot Q_3) \vec{e}_2 + (R_1 \cdot Q_2 - R_2 \cdot Q_1) \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{14}$$

Вариант программного кода, реализующего соотношения (14), дан в Приложении 1.

И, наконец, рассмотрим векторную обобщенную дуальную функцию от обобщенных дуальных векторов 3-го порядка:

$$\mathbf{F}(\mathbf{T}) = \mathbf{F}(\vec{t} + \vec{\Delta}) = \mathbf{F}\left(\sum_{n=1}^3 u_n(t_n)\vec{e}_n + \sum_{n=1}^3 \sum_m^3 u_{mn}(t_{mn})\mathbf{v}_m\vec{e}_n\right)$$

Её разложение в ряд Тейлора с учётом $\Delta_n = u_{1n}\mathbf{v}_1 + u_{2n}\mathbf{v}_2 + u_{3n}\mathbf{v}_3$, $\Delta_n^2 = 2u_{1n}^2\mathbf{v}_2 + 6u_{1n}u_{2n}\mathbf{v}_3$ и $\Delta_n^3 = 6u_{1n}^3\mathbf{v}_3$ даёт:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{T}) &= \sum_{n=1}^3 \left\{ u_n(t) + \sum_{m=1}^3 \frac{1}{m!} \Delta_n^m u_{mn}^{(m)}(t) \right\} \vec{e}_n = \\ &= \sum_{n=1}^3 \{ u_n(t_n) + u_{1n}\dot{u}_n(t_n)\mathbf{v}_1 + [u_{2n}\dot{u}_n(t_n) + u_{1n}^2\ddot{u}_n(t_n)]\mathbf{v}_2 + \\ &\quad + [u_{3n}\dot{u}_n(t) + 3u_{1n}u_{2n}\ddot{u}_n(t) + u_{1n}^3\ddot{u}_n(t)]\mathbf{v}_3 \} \vec{e}_n \end{aligned} \quad (15)$$

Если в (15) положить $u_n(t_n) = u_n(t)$, $u_{1n} = 1$, $u_{2n} = u_{3n} = 0$ и $\mathbf{U} = \sum_{n=1}^3 (u_n(t) + u_{1n}\mathbf{v}_1\vec{e}_n)$, то получим

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \sum_{n=1}^3 \{ u_n(t) + \dot{u}_n(t)\mathbf{v}_1 + \ddot{u}_n(t)\mathbf{v}_2 + \ddot{u}_n(t)\mathbf{v}_3 \} \vec{e}_n \quad (16)$$

Тогда первые три производные для каждого из направлений $\vec{e}_n$, определяются по формулам:

$$\dot{u}_n(t) = F_n(t).Im_1, \quad \ddot{u}_n(t) = F_n(t).Im_2, \quad \ddot{u}_n(t) = F_n(t).Im_3$$

Пример реализации формулы (16) для винтовой линии дан в Приложении 1 (см. функцию `Spiral(t)`). Численные эксперименты с другими кривыми можно найти в [7].

Подводя итог, наверное следует заметить, что за последние четыре года автором было представлено более тридцати работ, посвященных обобщенным дуальным числам, векторам и матрицам разного порядка, а также их применению в различных прикладных задачах на основе автоматического дифференцирования (см. интернет ресурс [ListArticals](#)). По сути, работы автора в этом направлении подчеркивают ценность обобщенных дуальных чисел как инструмента автоматического дифференцирования для точного и эффективного вычисления производных в различных научных и инженерных приложениях.

Приложение 1.

Вариант C# программного кода, реализующий обобщенные дуальные векторы 3-го порядка, использующий статическую библиотеку [Sdn3Lib.dll](#), которая включает

переопределение операций $+$, $-$, $*$, $\div$ и основных базовых функций $\text{pow}(\dots)$, $\text{powX}(\dots)$, $\text{exp}(\dots)$, $\text{ln}(\dots)$, $\text{log}(\dots)$, $\text{sqrt}(\dots)$, $\text{sin}(\dots)$, $\text{cos}(\dots)$, $\text{sh}(\dots)$, $\text{ch}(\dots)$, возвращающих гипер-дуальные числа 3-го порядка.

```
using System;
using S3 = Sdn3Lib.sdn3;

public struct sdn3V3
{
    #region vec3:
    public struct vec3
    {
        public double x, y, z;
        public vec3(double x, double y, double z)
        {
            this.x = x;
            this.y = y;
            this.z = z;
        }
    }

    #region OPERATORS (overloading):
    public static vec3 operator +(vec3 A, vec3 B){return new vec3(A.x + B.x,
                                                                A.y + B.y, A.z + B.z);}
    public static vec3 operator -(vec3 A, vec3 B){return new vec3(A.x - B.x,
                                                                A.y - B.y, A.z - B.z);}
    public static vec3 operator *(vec3 A, double b){return new vec3(A.x * b,
                                                                A.y * b, A.z * b);}
    public static vec3 operator *(double a, vec3 B){return B * a;}

    //scalar product A•B
    public static double operator *(vec3 A, vec3 B)
    {return (A.x * B.x + A.y * B.y + A.z * B.z);}

    #endregion
    // vector product (dot) AxB
    public vec3 X (vec3 B)
    { var A = new vec3(this.x, this.y, this.z);
      return new vec3(A.y * B.z - A.z * B.y, A.z * B.x - A.x * B.z,
                      A.x * B.y - A.y * B.x);
    }
    //module
    public static double mod(vec3 A){return Math.Sqrt(A * A);}

    //angle
    public static double  $\phi$ (vec3 A, vec3 B)
    {return Math.Acos((A * A) / (mod(A) * mod(B)));}
    }
    #endregion

    public vec3 re, im1, im2, im3;
    public sdn3V3(vec3 re, vec3 im1, vec3 im2, vec3 im3)
    {this.re = re; this.im1 = im1; this.im2 = im2; this.im3 = im3;}
    public static sdn3V3 operator +(sdn3V3 A, sdn3V3 B) {
        return new sdn3V3(A.re + B.re, A.im1 + B.im1, A.im2 + B.im2, A.im3 + B.im3);
    }
    public static sdn3V3 operator -(sdn3V3 A, sdn3V3 B)
    { return new sdn3V3(A.re - B.re, A.im1 - B.im1, A.im2 - B.im2, A.im3 - B.im3);}
}
```

```

public static S3 operator *(sdn3V3 A, sdn3V3 B)
{ double r = A.re * B.re,
  r1 = (A.re * B.im1) + (A.im1 * B.re),
  r2 = (A.re * B.im2) + 2.0 * (A.im1 * B.im1) + (A.im2 * B.re),
  r3 = (A.re * B.im3) + (A.im3 * B.re) + 3.0 * ((A.im1 * B.im2) +
                                                (A.im2 * B.im1));

  return new S3(r, r1, r2, r3);
}

// vector product (dot) AxB
public sdn3V3 X (sdn3V3 B) {
  var A = new sdn3V3(this.re, this.im1, this.im2, this.im3);
  vec3 r = A.re.X(B.re),
  r1 = A.re.X(B.im1) + A.im1.X(B.re),
  r2 = A.re.X(B.im2) + 2.0 * A.im1.X(B.im1) + A.im2.X(B.re),
  r3 = A.re.X(B.im3) + A.im3.X(B.re) + 3.0 * (A.im1.X(B.im2) +
                                                A.im2.X(B.im1));

  return new sdn3V3(r, r1, r2, r3);
}

public static S3 mod(sdn3V3 A) {
  return new S3(Math.Sqrt(A.re * A.re), Math.Sqrt(A.im1 * A.im1),
                Math.Sqrt(A.im2 * A.im2), Math.Sqrt(A.im3 * A.im3));
}
}

// circle of unit radius lying in a plane (x,y,0)
sdn3V3 CircleXY(double t) // Spiral
{ S3 T = new S3(t, 1.0, 0.0, 0.0), x = S3.cos(T), y = S3.sin(T);
  return new sdn3V3(new vec3(x.re, y.re, 0.0),
                    new vec3(x.im1, y.im1, 0.0),
                    new vec3(x.im2, y.im2, 0.0),
                    new vec3(x.im3, y.im3, 0.0));
}

// example of using the function CircleXY() Spiral()
var Cxy = sdn3V3.CircleXY(Math.PI/4.0); // Spiral
var CxC = Cxy.X(Cxy);
var CC = Cxy * Cxy;

```

ЛИТЕРАТУРА

1. Rehner P., Bauer G. Application of Generalized (Hyper-) Dual Numbers in Equation of State Modeling. – Institute of Thermodynamics and Thermal Process Engineering, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany. – 2021, 7 pp.
2. Олифер В. И. Автоматическое дифференцирование на основе супер-дуальных чисел– URL:http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/Автоматическое_дифференцирование_на_основе_супер-дуальных_чисел.pdf, – 2019.

3. Олифер В. И. Принцип перенесения в теории дуальных и усеченных гипер-дуальных чисел – URL:http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/Принцип_перенесения_в_теории_дуальных_и_усеченных_гипер-дуальных_чисел.pdf, – 2021.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
5. Naumann U. The Art of Differentiating Computer Programs. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2012.
6. Олифер В. И. Реализация метода Чебышева 5-го порядка на базе гипер-дуальных чисел 4-го порядка – URL:http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/Реализация_метода_Чебышева_5-го_порядка.pdf, – 2025.
7. Олифер В. И. Дифференциальная геометрия кривых в терминах гипер-дуальных чисел – URL:http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/Дифференциальная_геометрия_кривых_в_терминах_гипер-дуальных_чисел.pdf

Абстракт

В данной публикации рассматривается вариант теории обобщенных дуальных чисел и векторов K -го порядка. Дана конкретизация для обобщенных дуальных чисел 4-го порядка и векторов 3-го порядка. Описана процедура автоматического дифференцирования для функций от обобщенных дуальных чисел и векторов.

In this publication, a variant of the theory of generalized dual numbers and vectors of order K is considered. A specification is given for generalized dual numbers of order 4 and vectors of order 3. A procedure for automatic differentiation for functions of generalized dual numbers and vectors is described.

Ключевые слова: *теория обобщенных дуальных чисел и векторов, автоматическое дифференцирование, theory of generalized dual numbers and vectors, automatic differentiation.*

20 августа 2025 г