

К РАСЧЕТУ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ С МИНИМАЛЬНЫМ РЫВКОМ

Олифер В.И.

В работе [1] была рассмотрена следующая задача: «Полиномом какой степени можно описать траекторию движения точки при заданных начальных и конечных условиях?»

$$\text{Начальные и конечные условия: } y(t) \begin{cases} y(0) = 0; & y(t_n) = y_n; \\ \dot{y}(0) = 0; & \dot{y}(0) = 0; \\ \ddot{y}(0) = 0; & \ddot{y}(0) = 0; \end{cases}$$

Дополнительное условие: $\min_{t \in [0, t_n]} \int_0^{t_n} \ddot{y}(t)^2 dt$, где третья производная $\ddot{y}(t)$ называется рывком (jerk).

Авторы [1] задавались вопросом, какая функция $y(t)$ наиболее плавно соединяет начальную точку с целевой точкой за заданное время t_n . Эта функция $y(t)$, среди всех возможных функций, должна иметь минимальное значение рывков. Такой функцией оказался полином 5-й степени

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5, \quad (1)$$

При $t_n = 0.5$ и $y_n = 10$ значения коэффициентов этого полинома равны $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 800$, $a_4 = -2400$, $a_5 = 1920$.

Брюс Хофф и Майкл Арбиб [2] предложили нормализованное по t уравнение минимальной траектории рывка, которое также является полиномом пятой степени.

Цель такой нормализации преобразовать интервал $t \in [t_0, t_n]$ в интервал $[0, 1]$.

Если τ обозначает это нормализованное время, то имеем:

$$\tau = \frac{(t - t_0)}{D}, \quad \dot{t} = D^{-1}, \quad D = t_n - t_0, \quad \tau(t_0) = 0, \quad \tau(t_n) = 1, \quad t = \tau D + t_0$$

Тогда траектория с минимальным рывком имеет следующую форму

$$y(\tau) = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + a_4 \tau^4 + a_5 \tau^5 \quad (2)$$

$$\text{При начальных и конечных условиях: } y(\tau) \begin{cases} y(0) = y_0; & y(t_n) = y_n; \\ \dot{y}(0) = v_0; & \dot{y}(0) = 0; \\ \ddot{y}(0) = p_0; & \ddot{y}(0) = 0; \end{cases}$$

и с учётом $\dot{t} = 1/D$ получим

$$\begin{aligned} \dot{y}(\tau) &= (a_1 + 2a_2\tau + 3a_3\tau^2 + 4a_4\tau^3 + 5a_5\tau^4)/D; \\ \ddot{y}(\tau) &= (2a_2 + 6a_3\tau + 12a_4\tau^2 + 20a_5\tau^3)/D^2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\ddot{y}(\tau) = (6a_3 + 24a_4\tau + 60a_5\tau^2)/D^3,$$

где:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = Dv_0, \quad a_2 = Dp_0/2,$$

$$a_3 = -\frac{3D^2p_0}{2} - 6Dv_0 + 10\Delta y,$$

$$a_4 = \frac{3D^2p_0}{2} + 8Dv_0 - 15\Delta y, \quad a_5 = -\frac{D^2p_0}{2} - 3Dv_0 + 6\Delta y, \quad \Delta y = (y_n - y_0)$$

При $y_0 = v_0 = p_0 = 0$ и $\Delta y = (y_n - y_0)$ имеем

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = 10\Delta y, \quad a_4 = -15\Delta x, \quad a_5 = 6\Delta y$$

$$y(\tau) = (10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5)\Delta y;$$

$$v(\tau) = \dot{y}(\tau) = (30\tau^2 - 60\tau^3 + 30\tau^4)\Delta y/D; \tag{4}$$

$$a(\tau) = \ddot{y}(\tau) = (60\tau - 180\tau^2 + 120\tau^3)\Delta y/D^2;$$

$$j(\tau) = \ddot{y}(\tau) = (60 - 360\tau + 360\tau^2)\Delta y/D^3$$

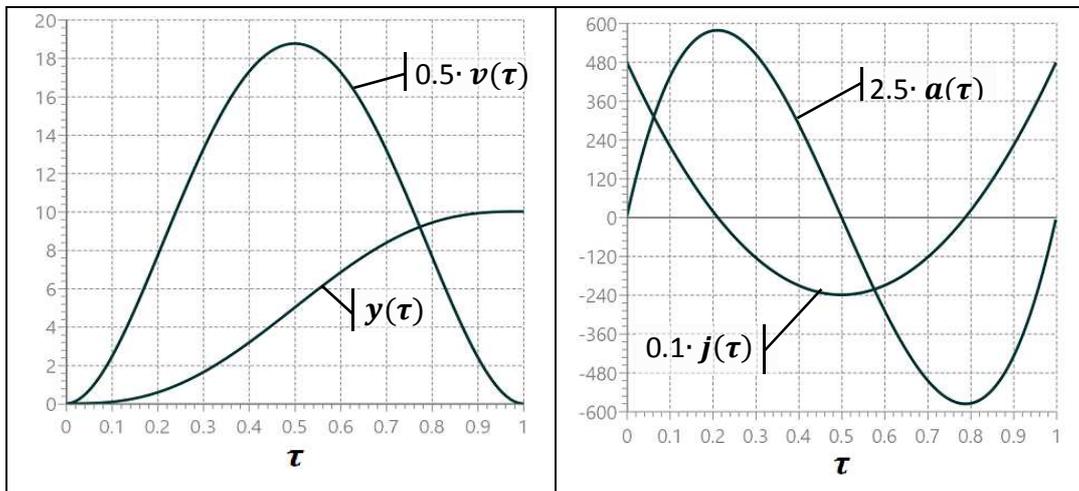


Рис 1. Графики $y(\tau)$, $v(\tau)$, $a(\tau)$, $j(\tau)$ при $y_0 = v_0 = p_0 = 0$ и $\Delta y = 10$, $D = 0.5$

В настоящей работе, принимая в расчет соотношения (3), делается попытка учесть влияние угловой скорости на уравнение минимальной траектории рывка.

Пусть движение точки происходит в плоскости $Oxy \perp z$ подвижной системе отсчета (см. рис. 2в), которая вращается с постоянной угловой скоростью ω_z относительно неподвижной системы отсчета (см. рис. 2а). Тогда согласно [3], движение точки при постоянной угловой скорости в неподвижной системе отсчета описывается уравнениями:

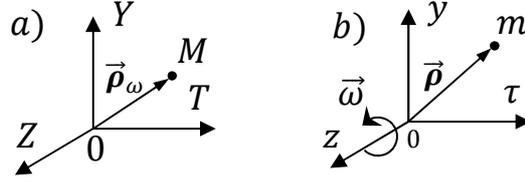


Рис 2. Неподвижная (а) и подвижная (в) системы отсчета

$$\begin{aligned}
 \vec{\rho}_\omega &= [\tau \cdot \cos(\tau\omega_z) - \rho_y \cdot \sin(\tau\omega_z)]\vec{i} + [\tau \cdot \sin(\tau\omega_z) + \rho_y \cdot \cos(\tau\omega_z)]\vec{j}, \\
 \vec{v} &= \dot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \\
 \vec{a} &= \ddot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}, \\
 \vec{j} &= \ddot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})) + 3\vec{\omega} \times (\dot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где:

$$\begin{aligned}
 \vec{\rho} &= \tau\vec{i} + \rho_y\vec{j} + 0\vec{k}, \quad \vec{\omega} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \omega_z\vec{k}, \\
 \dot{\vec{\rho}} &= \dot{\tau}\vec{i} + \dot{\rho}_y\vec{j} + 0\vec{k}, \quad \ddot{\vec{\rho}} = \ddot{\tau}\vec{i} + \ddot{\rho}_y\vec{j} + 0\vec{k}
 \end{aligned}$$

Учитывая следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \vec{\omega} \times \vec{\rho} &= \omega(-\rho\vec{i} + \tau\vec{j}), & \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} &= \omega(-\dot{\rho}\vec{i} + \dot{\tau}\vec{j}), \\
 \vec{\omega} \times \ddot{\vec{\rho}} &= \omega(-\ddot{\rho}\vec{i} + \ddot{\tau}\vec{j}), & \vec{\omega} \times \ddot{\vec{\rho}} &= \omega(-\ddot{\rho}\vec{i} + \ddot{\tau}\vec{j}), \\
 \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) &= -\omega^2(\tau\vec{i} + \rho\vec{j}), & \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})) &= \omega^3(\rho\vec{i} - \tau\vec{j}), \\
 \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}) &= -\omega^2(\dot{\tau}\vec{i} + \dot{\rho}\vec{j}),
 \end{aligned}$$

уравнения (5) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \dot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \dot{\tau}\vec{i} + \dot{\rho}_y\vec{j} + \omega_z(\tau\vec{j} - \rho_y\vec{i}) = \\
 &= (\dot{\tau} - \omega_z\rho_y)\vec{i} + (\dot{\rho}_y + \omega_z\tau)\vec{j},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \ddot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} = \ddot{\tau}\vec{i} + \ddot{\rho}_y\vec{j} - \omega^2(\tau\vec{i} + \rho\vec{j}) + 2\omega(-\dot{\rho}\vec{i} + \dot{\tau}\vec{j}) = \\
 &= (\ddot{\tau}(1 - \omega_z^2) - 2\omega_z\dot{\rho}_y)\vec{i} + (\ddot{\rho}_y + \omega_z(2\tau - \omega_z\rho_y))\vec{j},
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{j} &= \ddot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})) + 3\vec{\omega} \times (\dot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \\
 &= \ddot{\tau}\vec{i} + \ddot{\rho}_y\vec{j} + \omega^3(\rho\vec{i} - \tau\vec{j}) + 3\omega(-\dot{\rho}\vec{i} + \dot{\tau}\vec{j}) - 3\omega^2(\tau\vec{i} + \rho\vec{j}) = \\
 &= (\ddot{\tau}(1 - 3\omega_z^2) + \omega_z^3\rho_y - 3\omega_z\dot{\rho}_y)\vec{i} + (\ddot{\rho}_y - \omega_z^3\tau + 3\omega_z(\dot{\tau} - \omega_z\rho_y))\vec{j}
 \end{aligned}$$

Далее поставляя (4) в (6) при $\Delta u = 10$, $D = 0.5$ получим

$$\begin{cases} v_y(\tau) = \omega_z \tau + v(\tau); \\ v_x(\tau) = \tau - \omega_z y(\tau); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_y(\tau) = a(\tau) + \omega_z(2\tau - \omega_z y(\tau)); \\ a_x(\tau) = \tau(1 - \omega_z^2) - 2\omega_z v(\tau); \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_y(\tau) = j(\tau) - \omega_z^3 \tau + 3\omega_z(\tau - \omega_z v(\tau)); \\ j_x(\tau) = \tau(1 - 3\omega_z^2) + \omega_z^3 y(\tau) - 3\omega_z a(\tau); \end{cases}$$

$$|\vec{j}(\tau)| = \sqrt{j_x^2(\tau) + j_y^2(\tau)},$$

$$\Delta v(\tau) = v_y(\tau) - v(\tau) = \omega_z \tau,$$

$$\Delta a(\tau) = a_y(\tau) - a(\tau) = \omega_z(2\tau - \omega_z y(\tau)),$$

$$\Delta j(\tau) = j_y(\tau) - j(\tau) = -\omega_z^3 \tau + 3\omega_z(\tau - \omega_z v(\tau)),$$

где:

$$y(\tau) = 100\tau^3 - 150\tau^4 + 60\tau^5;$$

$$v(\tau) = 600\tau^2 - 1200\tau^3 + 600\tau^4;$$

$$a(\tau) = 2400\tau - 7200\tau^2 + 4800\tau^3;$$

$$j(\tau) = 4800 - 2880\tau + 2880\tau^2$$

Результаты расчёта для $\omega_z = \pi/8$ представлены в виде соответствующих графиков в Приложении 1. Значение компоненты рывка j_y в среднем уменьшилось на 0.5%. Естественно эта величина будет расти с увеличением угловой скорости ω_z .

В заключение, заметим, что все выше приведенные математические преобразования, проверялись искусственным интеллектом *CoPilot*.

Приложение 1.

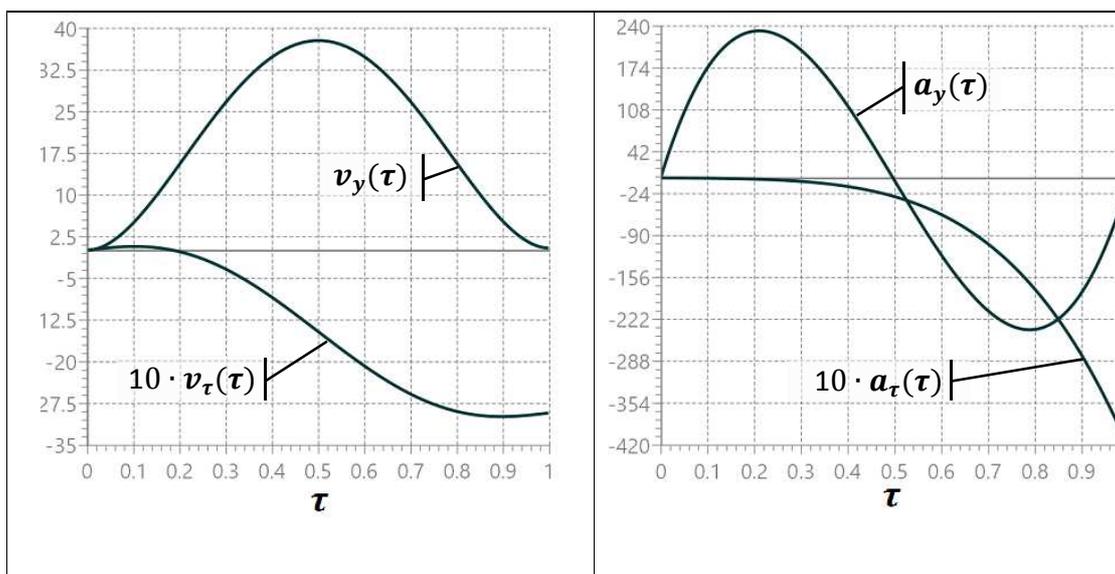


Рис 3. Графики компонент векторов скорости \vec{v} и ускорения \vec{a}

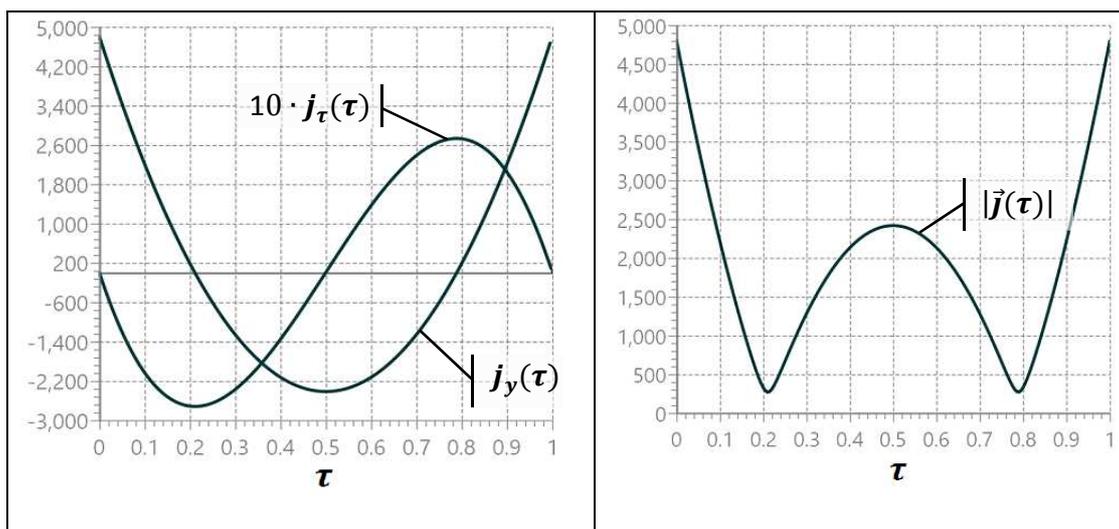


Рис 4. Графики компонент вектора рывка \vec{j} и его модуля $|j(\tau)|$

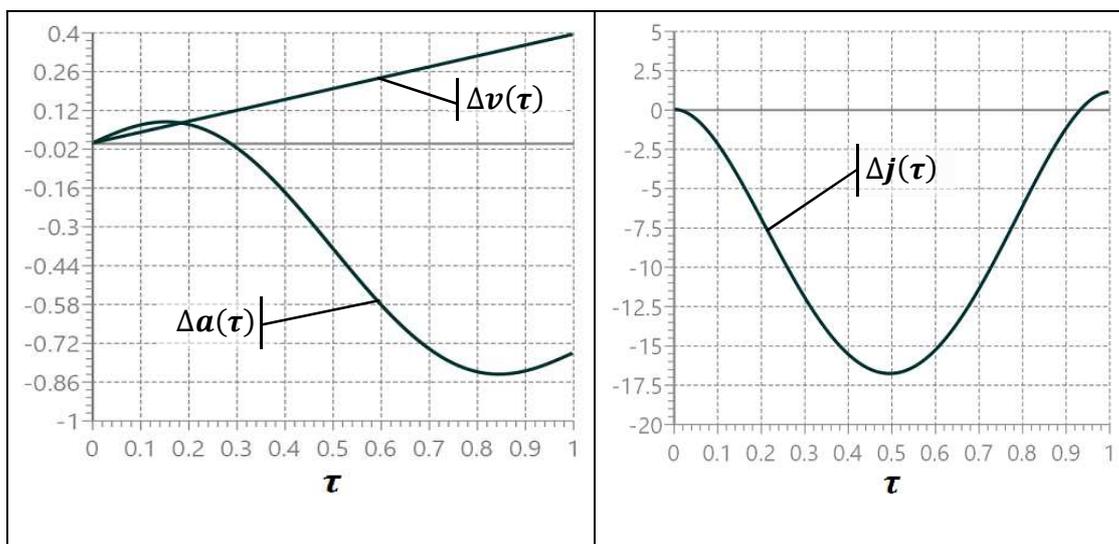


Рис 5. Графики отклонений $\Delta v(\tau) = v_y(\tau) - v(\tau)$, $\Delta a(\tau) = a_y(\tau) - a(\tau)$, $\Delta j(\tau) = j_y(\tau) - j(\tau)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Flash T., and Hogan N. The coordination of arm movements: an experimentally confirmed mathematical model. J Neurosci 5: 1688-1703, – 1985.
2. Hoff B., Arbib MA. A model of the effects of speed, accuracy, and perturbation on visually guided reaching. In: Control of arm movement in space: neurophysiological and computational approaches (Caminiti R, Johnson PB, Burnod Y, eds), – 1992, pp 285-306.
3. Олифер В. И. О сложном движении точки с учетом рывка. – URL:http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/o_сложном_движении_точки_с_учетом_рывка.pdf, – 2025.

Абстракт

В данной публикации рассматривается модель сложного движения материальной точки с учетом рывка и вращения при заданных начальных и конечных условиях, а также минимума вариации квадрата рывка.

This publication examines a model of complex motion of a material point, taking into account jerk and rotation, with given initial and final conditions, as well as the minimization of the variation of the square of the jerk.

Ключевые слова: *сложное движение, учёт рывка и вращения, минимальная траектория рывка, complex movement, taking into account jerk and rotation, minimum jerk trajectory.*

20 января 2026 г.