ПРИНЦИП ПЕРЕНЕСЕНИЯ В ТЕОРИИ ДУАЛЬНЫХ И УСЕЧЕННЫХ ГИПЕР-ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Олифер В. И.

«Математика есть наука экспериментальная, определения появляются последними.»
Оливер Хевисайд

Дуальные числа были введены в 1871 году Уильям Клиффорд [1] и использованы в начале двадцатого века немецким математиком Эдуардом Штуди [2], который применял их для представления дуального угла, измеряющего относительное положение двух косых линий в пространстве. Дуальным числом или (гипер) комплексным числом параболического типа «по Клиффорду» называется комплексное число вида $\mathcal{A} = a + b\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\varepsilon}^2 = 0$.
По-видимому, еще Л. Эйлер использовал нули различных порядков, например, $\omega = \sqrt{0},\ \ \omega^2 = 0,\ 0 < \omega < \delta$ (δ – любое положительное число) в исчислении бесконечно-малых величин. В современном нестандартном анализе [9, 10] такие величины называются нестандартными или актуальными бесконечно малыми, они могут иметь разный порядок малости.
В конце XIX века А. П. Котельников [3] фактически использовал дуальные числа для развития теории винтов, которая нашла широкое применение в различных разделах физики, механики, геометрии [4]. Им был предложен принцип (утверждение сформированое на основе экспериментов и наблюдений) или метод перенесения (соответствия), который в упрощенном виде может быть сформулирован так: «Решение, полученное на множестве вещественных чисел, может быть перенесено в область дуальных чисел путем замены вещественных чисел и функций на дуальные числа и соответствующие функции дуального аргумента». Справедливости ради, похожие утверждения были использованы в работах У. Клиффорд, Э. Штуди и их последователей.

Дуальные числа

Классические дуальные числа [5] это – гиперкомплексные параболические числа вида
$\mathcal{X} = x + x_1\boldsymbol{\varepsilon}$, где x и x_1 – вещественные числа, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ – абстрактный элемент, квадрат которого равен нулю [4]. Число x называется главной (Re - действительной) частью дуального числа, а x_1 – мнимой (Im - инфинитезимальной) его частью. Абстрактный элемент $\boldsymbol{\varepsilon}$ является *основным базисом* мнимой части дуального числа. Причем $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n = 0$ при $n > 1$ (см. Табл. 1.1).

×	**1**	$\boldsymbol{\varepsilon}$
1	1	$\boldsymbol{\varepsilon}$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	0

(1.1)

Таблица 1.1. Правила умножения элементов базиса дуальных чисел $\{\mathbf{1},\ \boldsymbol{\varepsilon}\}$

Для дуальных чисел определены операции сложения, умножения и деления:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{X}+\mathcal{Y}=(x+x_1\boldsymbol{\varepsilon})+(y+y_1\boldsymbol{\varepsilon})=(x+y)+(x_1+y_1)\boldsymbol{\varepsilon},\\
&\mathcal{X}\cdot\mathcal{Y}=(x+x_1\boldsymbol{\varepsilon})\cdot(y+y_1\boldsymbol{\varepsilon})=(x\cdot y)+(x\cdot y_1+y\cdot x_1)\boldsymbol{\varepsilon},\\
&\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}}=\frac{(x+x_1\boldsymbol{\varepsilon})}{(y+y_1\boldsymbol{\varepsilon})}=\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{(y\cdot x_1-x\cdot y_1)}{y^2}\boldsymbol{\varepsilon}\quad \text{при}\quad y\neq 0,\\
&\mathcal{X}^n=x^n+n\cdot x_1\cdot x^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon},\quad e^{\mathcal{X}}=e^x(1+x_1\boldsymbol{\varepsilon})
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Дуальный ноль и дуальная единица опреляются следующими выражениями $\emptyset = 0\ +\ 0\boldsymbol{\varepsilon}$, $E = 1\ +\ 0\boldsymbol{\varepsilon}$.

Разложение аналитической функции дуального аргумента (с учетом свойств $\boldsymbol{\varepsilon}$) в ряд Тейлора дает

$$\mathcal{F}(x\ +\ x_1\boldsymbol{\varepsilon})=f(x)+x_1f'(x), \tag{1.3}$$

где: $f(x)=\ \mathcal{F}(x+0\boldsymbol{\varepsilon})$, $f'(x)=\ \partial f(x)/\partial x$.

Нетрудно видеть, что значение функции дуального аргумента $\mathcal{F}(x\ +\ x_1\boldsymbol{\varepsilon})$ определяется через значения этой функции $f(x)=\ \mathcal{F}(x+0\boldsymbol{\varepsilon})$ и ее производной $f'(x)$ от главной части дуального числа x и величины мнимой части x_1. При $x_1=1$ получим $\mathcal{F}(x\ +\ \boldsymbol{\varepsilon})=f(x)+f'(x)\boldsymbol{\varepsilon}$ – представление функции дуального аргумента с мнимой частью, содержащей только значение производной. Таким образом, производя вычисления не над вещественными, а над дуальными числами, можно автоматически получать точные значения производной функции в точке. Особенно удобно рассматривать таким образом сложные композиции функций.

Согласно принципу перенесения: для аналитических функций дуальных величин сохраняются все формулы и теоремы дифференциального и интегрального исчислений [4], например,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}(\mathcal{X})=f(x)+x_1\cdot f'(x),\\
&\frac{d\mathcal{F}(\mathcal{X})}{d\mathcal{X}}=\frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{X})}{\partial x}=\ f'(x)+x_1\cdot f''(x)\boldsymbol{\varepsilon},\\
&\mathcal{F}(\mathcal{X})\cdot\mathcal{Q}(\mathcal{X})\ =\ f(x)\cdot q(x)+x_1[f(x)\cdot q(x)]'\boldsymbol{\varepsilon},\\
&[\mathcal{F}(\mathcal{X})\cdot\mathcal{Q}(\mathcal{X})]'=[f(x)\cdot q(x)]'+x_1[f(x)\cdot q(x)]''\boldsymbol{\varepsilon},\\
&(\mathcal{X}^n)'=n\mathcal{X}^{n-1},\ \ (e^{\mathcal{X}})'=e^{\mathcal{X}},\ \ ln(\mathcal{X})'=\mathcal{X}^{-1},\\
&sin'(\mathcal{X})=cos(\mathcal{X}),\quad \cos'(\mathcal{X})=-sin(\mathcal{X}),
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\mathcal{F}(\mathcal{X})d\mathcal{X}=\int\mathcal{F}(\mathcal{X})dx,\\
&\int\mathcal{X}^{\mathcal{A}}d\mathcal{X}=\frac{1}{\mathcal{A}+1}\mathcal{X}^{\mathcal{A}+1}+\mathcal{C},\\
&\int cos(\mathcal{A}\cdot\mathcal{X})d\mathcal{X}=\frac{1}{\mathcal{A}}sin(\mathcal{A}\cdot\mathcal{X})+\mathcal{C},
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \mathcal{F}(\mathcal{X})d\mathcal{X} = \int_{a}^{b} \mathcal{F}(\mathcal{X})dx + [b_1 \cdot f(b) - a_1 \cdot f(a)]\boldsymbol{\varepsilon}$$

Переход к дуальным числам при решении и исследовании дифференциальных уравнений с малым параметром заметно упрощает даже самые рутинные вычисления. Для примера, рассмотрим задачу Коши для линейного ОДУ второго порядка, соответствующую движению гармонического осцилятора с циклической частатой $(1+\epsilon)$ и возмущением -2ϵ (ϵ – некоторый малый параметр обычно предполагаемый близким к 0):

$$u''(x,\epsilon) = (1+\epsilon)\cdot u(x,\epsilon) - 2\epsilon, \quad u(0,\epsilon) = 1-2\epsilon, \quad u'(0,\epsilon) = \epsilon \tag{1.6}$$

Применим некоторые элементы принципа перенесения (переход из области вещественных чисел в область дуальных) к (1.6), а именно: заменим ϵ на $\boldsymbol{\varepsilon}$ и введем обозначения

$$\Lambda^2(\boldsymbol{\varepsilon}) = (1+\boldsymbol{\varepsilon}) = \left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right)^2, \quad \Lambda(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathrm{H}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0+2\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.7}$$

Тогда исходная задача (1.6) примет вид

$$u''(x,\boldsymbol{\varepsilon}) = \Lambda^2(\boldsymbol{\varepsilon})\cdot u(x,\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathrm{H}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad u(0,\boldsymbol{\varepsilon}) = 1-\mathrm{H}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad u'(0,\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{\varepsilon})/2 \tag{1.8}$$

Нетрудно проверить, что частное решение задачи (1.8) имеет вид $u_*(x,\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{\varepsilon})$, а корни соответствующего характеристического однородноного уравниня (1.8) выражаются соотношением $\pm\Lambda$. В этом случае общее решение запишется так

$$u(x,\boldsymbol{\varepsilon}) = C_1\cdot e^{x\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon})} + C_2\cdot e^{-x\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon})} + \mathrm{H}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{1.9}$$

и

$$\begin{gathered} u'(x,\boldsymbol{\varepsilon}) = C_1\cdot\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon})\cdot e^{x\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon})} - C_2\cdot\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon})e^{-x\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon})}, \\ u''(x,\boldsymbol{\varepsilon}) = C_1\cdot\Lambda^2(\boldsymbol{\varepsilon})\cdot e^{x\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon})} + C_2\cdot\Lambda^2\cdot(\boldsymbol{\varepsilon})e^{-x\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon})} \end{gathered} \tag{1.10}$$

Используя начальные условия из (1.8) получим $C_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\mathrm{H}(\boldsymbol{\varepsilon})\right)$, $C_2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{2}\mathrm{H}(\boldsymbol{\varepsilon})\right)$

Учитывая справедливость формулы $e^{a+b\boldsymbol{\varepsilon}} = e^a(1+b\boldsymbol{\varepsilon})$, полученное выше решение (1.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(x,\boldsymbol{\varepsilon}) &= C_1e^x(1+0.5\cdot x\boldsymbol{\varepsilon}) + C_2e^{-x}(1-0.5\cdot x\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= C_1e^x + C_2e^{-x} + 0.5\cdot x(C_1e^x - C_2e^{-x})\boldsymbol{\varepsilon} + 2\boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= ch(x) + \left[\frac{x\cdot sh(x)}{2} - 3\cdot ch(x) - e^{-x} + 2\right]\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Осуществляя обратную замену $\boldsymbol{\varepsilon}$ на ϵ получим решение в области вещественных чисел. Конечно, нечто подобное можно делать и с использованием символа ϵ, но при этом придется постоянно следить за корректностью проводимых преобразований. В дуальной области корректность достигается автоматически.

Во многих численных методах требуется вычисление значений исходной функции и её первой и второй производных. Для получения которых необходимо расширение дуальных чисел.

Усеченные гипер-дуальные числа

Для получения точных значений первых и вторых производных исходной функции, в работах [6, 7] были рассмотрены гипер-дуальные числа, которые является расширением пространства дуальных чисел и имеют три мнимые части. Промежуточное место между дуальными и гипер-дуальными числами занимают усеченные гипер-дуальные числа [8], имеющие две мнимые части (это и определило название этих чисел). Согласно [8] усеченное гипер-дуальное число (truncated hyper-dual number) определяется выражением $X = x + x_1\boldsymbol{\varepsilon} + x_2\boldsymbol{\omega}$, где x, x_1 и x_2 – вещественные числа, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$ – мнимые символы. Пространство усеченных гипер-дуальных чисел отвечает трехмерной алгебре с правилом умножения элементов базиса $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}\}$:

×	**1**	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\omega}$
1	1	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\omega}$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$2\boldsymbol{\omega}$	0
$\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{\omega}$	0	0

(2.1)

Таблица 2.1. Правила умножения элементов базиса усечённых гипер-дуальных чисел

Число $x = Re(X) = X.Re$ называется главной частью X, а $x_1 = Im_1(X) = X.Im1$ и $x_2 = Im_2(X) = X.Im2$ – мнимыми частями X.
Алгебраические операции сложения, умножения, обращения и деления (с учетом табл. 2.1) определены по правилам:

$$\begin{aligned}
&A = a + a_1\boldsymbol{\varepsilon} + a_2\boldsymbol{\omega}, \qquad B = b + b_1\boldsymbol{\varepsilon} + b_2\boldsymbol{\omega}\\
&A + B = a + b + (a_1 + b_1)\boldsymbol{\varepsilon} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{\omega},\\
&A\cdot B = a\cdot b + (a\cdot b_1 + b\cdot a_1)\boldsymbol{\varepsilon} + (a\cdot b_2 + 2\cdot a_1\cdot b_1 + b\cdot a_2)\boldsymbol{\omega},\\
&A^{-1} = a^{-1} - a_1\cdot a^{-2}\boldsymbol{\varepsilon} + (2\cdot a_1^2\cdot a^{-3} - a_2\cdot a^{-2})\boldsymbol{\omega},\\
&{}^{A}\!/_{B} = A\cdot B^{-1} = a\cdot b^{-1} + (a_1\cdot b^{-1} - a\cdot b_1\cdot b^{-2})\boldsymbol{\varepsilon} + [2\cdot(a\cdot b_1^2\cdot b^{-3} - a_1\cdot b_1\cdot b^{-2}) -\\
&\qquad\qquad a\cdot b_2\cdot b^{-2} + a_2\cdot b^{-1}]\boldsymbol{\omega}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Гипер-дуальный ноль и гипер-дуальная единица опреляются следующими соотношениями

$$\emptyset = 0 + 0\boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega}, \quad E = 1 + 0\boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} \tag{2.3}$$

Функция усеченного гипер-дуального аргумента реализуется выражением

$$F(X) = f(x) + x_1\cdot f'(x)\boldsymbol{\varepsilon} + [x_2\cdot f'(x) + x_1^2\cdot f''(x)]\boldsymbol{\omega} \tag{2.4}$$

При $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ выражение (2.4) принимает вид:

$$F(X) = f(x) + f'(x)\boldsymbol{\varepsilon} + f''(x)\boldsymbol{\omega} \tag{2.5}$$

Описания элементарных (базовых) функций усечённого гипер-дуального аргумента приведены в [8]. Например, $\mathrm{Y} = \exp(X) = e^x[1 + x_1\boldsymbol{\varepsilon} + (x_1^2 + x_2)\boldsymbol{\omega}]$, откуда $Re(\mathrm{Y}) = e^x$, $Im_1(Y) = x_1 \cdot e^x$ и $Im_2(Y) = (x_1^2 + x_2) \cdot e^x$. При $X = x + 1\boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega}$ имеем $\exp(X) = e^x\,(1 + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega})$, при $X = x + 1\boldsymbol{\varepsilon} + 1\boldsymbol{\omega}$: $\exp(X) = e^x\,(1 + \boldsymbol{\varepsilon} + 2\boldsymbol{\omega})$.

Принцип перенесения справедлив и для аналитических функций усеченных гипер-дуальных величин, при $X = x + x_1\boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega}$ имеем:

$$\begin{aligned} F(X) &= f(x) + x_1 \cdot f'(x)\boldsymbol{\varepsilon} + x_1^2 \cdot f''(x)\boldsymbol{\omega}, \\ \frac{dF(X)}{dX} = \frac{\partial F(X)}{\partial x} &= f'(x) + x_1 \cdot f''(x)\boldsymbol{\varepsilon} + x_1^2 \cdot f'''(x)\boldsymbol{\omega}, \\ F(X) \cdot Q(X) &= \varphi(x) + x_1 \cdot \varphi'(x)\boldsymbol{\varepsilon} + x_1^2 \varphi''(x)\boldsymbol{\omega}, \\ [F(X) \cdot Q(X)]' &= \varphi'(x) + x_1 \cdot \varphi''(x)\,\boldsymbol{\varepsilon} + x_1^2 \cdot \varphi'''(x)\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где: $\varphi(x) = f(x) \cdot q(x)$

$$\begin{aligned} &(\mathrm{X}^n)' = n\mathrm{X}^{n-1}, \quad (e^X)' = e^X = e^x(1 + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}), \\ &ln(\mathrm{X})' = X^{-1} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{2}{x^2}\boldsymbol{\omega}\right), \\ &sin'(X) = cos(X), \quad \cos'(X) = -sin(X), \\ &sin^2(X) + cos^2(X) = 1, \quad ch^2(X) - sh^2(X) = 1 \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{2.7}$$

и наконец

$$\begin{aligned} &\int F(X)dX = \int F(X)dx, \\ &\int X^A dX = \frac{1}{A+1}X^{A+1} + C, \\ &\int cos(A \cdot X)dX = \frac{1}{A}sin(A \cdot X) + C, \\ &\int_A^B F(X)dX = \int_a^b F(X)dx + [b_1 \cdot f(b) - a_1 \cdot f(a)]\boldsymbol{\varepsilon} + \\ &\qquad + [b_2 \cdot f'(b) - a_2 \cdot f'(a)]\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Нетрудно видеть, что как и в случае дуальных чисел принцип перенесения справедлив и для усеченных гипер-дуальных чисел. Более того, усеченные гипер-дуальные числа можно ассоциировать с гипер-вещественными числами нестандарного анализа [9, 10], если считать, что базисные элементы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$ являются актуальными бесконечно малыми числами первого и второго порядков.

В нестандарном анализе также действует аналогичный принцип перенесения. Все три пространства (гипер-вещественные числа, дуальные числа и усеченные гипер-дуальные числа) являются разными расширениями вещественных чисел.

Рассмотрим задачу (1.6) для случая когда имеют место малые параметры ϵ_1 и ϵ_2 первого и второго порядков соответствено (при условии $\epsilon_1^2 = 2\epsilon_2$):

$$u''(x,\epsilon_1,\epsilon_2) = (1+\epsilon_1)\cdot u(x,\epsilon_1,\epsilon_2) - 2\epsilon_2, \quad u(0) = 1-2\epsilon_1, \quad u'(0) = \epsilon_1 \tag{2.9}$$

Переход из области вещественных чисел в область усеченных гипер-дуальных чисел дает:

$$u''(x,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\omega}) - \Lambda^2(\boldsymbol{\varepsilon})\cdot u(x,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\omega}) = -2\boldsymbol{\omega}, \quad u(0) = 1-2\boldsymbol{\varepsilon}, \quad u'(0) = \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.10}$$

где:

$$\Lambda^2(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\omega}) = \left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega}\right)^2 = (1+\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \Lambda(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\omega}) = 1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega}$$

Общее решение (2.10) имеет вид

$$u(x,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\omega}) = C_1\cdot e^{x\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon})} + C_2\cdot e^{-x\Lambda(\boldsymbol{\varepsilon})} + 2\boldsymbol{\omega}, \tag{2.11}$$

Используя начальные условия из (2.10) получим значения констант C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{1}{2}\,(1-\boldsymbol{\varepsilon} - 3\boldsymbol{\omega}), \quad C_2 = \frac{1}{2}\,(1-3\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\omega}) \tag{2.12}$$

Постановка (2.12) в (2.11), используя (2.2), (2.4) и приведение подобных дает

$$\begin{aligned} u(x,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\omega}) &= ch(x) + \left[\frac{x\cdot sh(x)}{2} - 3\cdot ch(x) - e^{-x}\right]\boldsymbol{\varepsilon} + \\ &+ \left[\frac{x\cdot sh(x)}{4}\,(x-5) + e^{-x}(x+1) - 3\cdot ch(x) + 2\right]\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{2.13}$$

И, наконец, возвращаясь в пространство вещественных чисел получим окончательное решение

$$\begin{aligned} u(x,\epsilon_1,\epsilon_2) &= ch(x) + \left[\frac{x\cdot sh(x)}{2} - 3\cdot ch(x) - e^{-x}\right]\epsilon_1 + \\ &+ \left[\frac{x\cdot sh(x)}{4}\,(x-5) + e^{-x}(x+1) - 3\cdot ch(x) + 2\right]\epsilon_2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

В пространстве усеченных гипер-дуальных чисел при использовании соотношений (2.2) и (2.4) корректность преобразований достигается автоматически. Приведенный выше пример предполагает связь между малыми параметрами ϵ_1 и ϵ_2 в виде $\epsilon_1^2 = 2\epsilon_2$. Однако не представляет труда обобщить эту связь на случай $\epsilon_1^2 = \alpha\epsilon_2$, где α - любое вещественное число. Это достигается путем изменения таблицы умножения элементов базиса усечённых гипер-дуальных чисел, что приведет к несущественному изменению формул (2.2), (2.4), (2.6) и (2.7). Более того, при необходимости рассмотрения малых параметров более высоких порядков следует воспользоваться соответствующими классами супер-дуальных чисел [11]. Принцип перенесения остается справедливым и для них.

Литература

1. *Clifford W. K.* Preliminary Sketch of Biquaternions. Proc. London Math. Soc., s1-4(1):381–395, 1871.
2. *Study E.* Geometrie der Dynamen. Verlag Teubner, Leipzig, 1903.
3. *Котельников А. П.* Винты и комплексные числа. Казань, 1896. – 6 с.
4. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. – 328 с.
5. *Гордеев В. Н.* Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике. Киев: Сталь, 2016. – 315 с.
6. *Fike J.A., Alonso J.J.* The development of hyper-dual numbers for exact second derivative calculations. AIAA paper 2011-886, 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting, January 4-7, 2011.
7. *Fike J.A.* Multi-objective optimization using hyper-dual numbers. Ph.D. Dissertation, Stanford University, 2013.
8. *Олифер В. И.* Усеченные гипер-дуальные числа в автоматическом дифференцировании. –URL: http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/ Усеченные_гипер-дуальные_числа_в_автоматическом_дифференцировании.pdf, 2020.
9. *Успенский В. А.* Что такое нестандартный анализ. – М.: Наука, 1987. – 128 с.
10. *Гордон Е. И., Кусраев А. Г., С. С. Кутателадзе С. С.* Инфинитезимальный анализ. – Изд-во ин-та математики, Новосибирск, 2006. 526 с.
11. *Олифер В. И.* Автоматическое дифференцирование на основе супер-дуальных чисел. –URL: http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/ К_численному_решению_задачи_коши_с_использованием_гипер-дуальных_чисел.pdf, 2020.

Абстракт

Показано применение принципа перенесения в теории дуальных и усеченных гипер-дуальных чисел для решения дифференциальных уравнений с малыми параметрами до второго порядка включительно. Приводятся примеры решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с малыми параметрами, соответствующей движению гармонического осцилятора.

Ключевые слова: *дуальные числа, гипер-дуальные числа, принцип перенесения, малые параметры различных порядков, dual numbers, hyper-dual numbers, transfer principle, small parameters of various orders*

---

20 сентября 2021