ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ В ТЕРМИНАХ ГИПЕР-ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Одним из основных направлений дифференциальной геометрии кривых является изучение локальных свойств кривых на основе дифференциального исчисления. Следствие этого кривые рассматриваются как функции, которые можно дифференцировать несколько раз [1]. Основными локальными свойствами таких кривых являются: кривизна, кручение, касательная, нормаль и бинормаль кривой в её исследуемой точке, а так же длина дуги кривой.

Кривые в трехмерном пространстве можно задавать параметрическими уравнениями вида $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты радиус-вектора в момент времени t, а $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ – базис декартовой системы координат. В этом случае вышеперечисленные локальные свойства кривой определяются формулами:

- кривизна

$$\kappa_1 = \frac{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{(\ddot{z}\dot{y} - \ddot{y}\dot{z})^2 + (\ddot{x}\dot{z} - \ddot{z}\dot{x})^2 + (\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})^2}}{\left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\right)^3}, \tag{1}$$

- кручение (2-я кривизна**)**

$$\kappa_2 = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})}{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right|^2} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2} = \frac{\dddot{x}(\ddot{z}\dot{y} - \ddot{y}\dot{z}) + \dddot{y}(\ddot{x}\dot{z} - \dot{x}\ddot{z}) + \dddot{z}(\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})}{(\ddot{z}\dot{y} - \ddot{y}\dot{z})^2 + (\ddot{x}\dot{z} - \ddot{z}\dot{x})^2 + (\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})^2} \tag{2}$$

- направляющая касательной

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{\imath} + \dot{y}(t)\vec{\jmath} + \dot{z}(t)\vec{k} \tag{3}$$

- направляющая бинормали

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})\vec{\imath} + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})\vec{\jmath} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\vec{k} \tag{4}$$

- направляющая нормали

$$\vec{n} = \vec{\tau} \times \vec{b} = \left[\dot{x}(t)\vec{\imath} + \dot{y}(t)\vec{\jmath} + \dot{z}(t)\vec{k}\right] \times \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} \tag{5}$$

- длина дуги

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt \tag{6}$$

В соотношениях (1) – (6):

$\dot{f}(t) = \dfrac{dp(t)}{dt}, \quad \ddot{f}(t) = \dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}\,, \quad \dddot{f}(t) = \dfrac{d^3 f(t)}{dt^3},$

а $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ скалярное и векторное произведение соответственно.

Для численной реализации (1) – (6) необходимо располагать производными 1-го, 2-го и 3-го порядков для функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, а для определения местоположения исследуемой точки еще потребуются значения самих функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Заметим, что, вообще говоря, названные функции могут быть сложными композициями элементарных функций, представленные програмным кодом. В этом случае точное вычисление производных может оказаться весьма трудоёмкой или даже невыполнимой задачей.
Для точного компьютерного вычисления указанных выше производных будем исходить из автоматического дифференцирования, основанного на гипер-дуальных чисел 3-го класса [2].
Гипер-дуальные чисело 3-го класса имеет представление в виде $Z = z + z_1\boldsymbol{\varepsilon} + z_2\boldsymbol{\omega} + z_3\boldsymbol{\gamma}$; $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{R}$. Число z называется главной (*Re* - действительной) частью дуального числа, а $z_1,\ z_2,\ z_3$ – его мнимыми (*Im1*, *Im2*, *Im3* - инфинитезимальными) частями. Абстрактные элементы $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$ образуют базис мнимых частей дуального числа, которые отвечает следующими правилам: $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = 2\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\varepsilon\omega} = 3\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\varepsilon\gamma} = \boldsymbol{\omega\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^2 = \boldsymbol{\omega}^2 = 0$.

Алгебраические операции над дуальными числами 3-го класса определяются формулами:

$X = x + x_1\boldsymbol{\varepsilon} + x_2\boldsymbol{\omega} + x_3\boldsymbol{\gamma}, \qquad Y = y + y_1\boldsymbol{\varepsilon} + y_2\boldsymbol{\omega} + y_3\boldsymbol{\gamma}$

$X + Y = x + y + (x_1 + y_1)\boldsymbol{\varepsilon} + (x_2 + y_2)\boldsymbol{\omega} + (x_3 + y_3)\boldsymbol{\gamma},$

$X{\cdot}Y = x{\cdot}y + (x{\cdot}y_1 + y{\cdot}x_1)\boldsymbol{\varepsilon} + (x{\cdot}y_2 + 2x_1{\cdot}y_1 + y{\cdot}x_2)\boldsymbol{\omega} + (x{\cdot}y_3 + y{\cdot}x_3 + 3(x_1{\cdot}y_2 + y_1{\cdot}x_2))\boldsymbol{\gamma},$

$Y^{-1} = y^{-1} - y^{-2}{\cdot}y_1\boldsymbol{\varepsilon} + y^{-2}(\,2{\cdot}y_1^2{\cdot}y^{-1} - y_2)\boldsymbol{\omega} + a^{-2}(6y_1{\cdot}y^{-1}(y_2 - y_1^2{\cdot}y^{-1}) - y_3)\boldsymbol{\gamma},$

$X/Y \;=\; X{\cdot}Y^{-1}$

Важной особенностью дуальных чисел 3-го класса является возможность представления дуальных функций 3-го класса в виде

$F(t + \boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} + 0\boldsymbol{\gamma}) = f(t) + \dot{f}(t)(t)\boldsymbol{\varepsilon} + \ddot{f}(t)(t)\boldsymbol{\omega} + \dddot{f}(t)(t)\boldsymbol{\gamma}, \qquad f(t) = F(t + 0\boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} + 0\boldsymbol{\gamma})$

Для комьютерной реализации типа данных, основанного на дуальных чисел 3-го класса, необходимо перезагрузить базовые математические функции и операции над ними. В [2] на языка Swift был создан такой тип данных Thd3. В этом слачае за одно обращение к перезагруженной функции точно вычисляются значения самой функции и ее первой, второй и третьей производных. Формально это можно записать следующим образом

$X(T) = x + \dot{x}\boldsymbol{\varepsilon} + \ddot{x}\boldsymbol{\omega} + \dddot{x}\boldsymbol{\gamma}, \qquad Y(T) = y + \dot{y}\boldsymbol{\varepsilon} + \ddot{y}\boldsymbol{\omega} + \dddot{y}\boldsymbol{\gamma}, \qquad Z(T) = z + \dot{z}\boldsymbol{\varepsilon} + \ddot{z}\boldsymbol{\omega} + \dddot{z}\boldsymbol{\gamma},$

$$T = (t + \boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} + 0\boldsymbol{\gamma}),$$

$$\begin{aligned} &x(t) = X.Re,\ \dot{x}(t) = X.Im1,\quad \ddot{x}(t) = X.Im2,\quad \dddot{x}(t) = X.Im3, \\ &y(t) = Y.Re,\ \dot{y}(t) = Y.Im1,\quad \ddot{y}(t) = Y.Im2,\quad \dddot{y}(t) = Y.Im3, \\ &z(t) = Z.Re,\ \dot{z}(t) = Z.Im1,\quad \ddot{z}(t) = Z.Im2,\quad \dddot{z}(t) = Z.Im3 \end{aligned} \tag{7}$$

Значения $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, $\dot{z}$, $\ddot{z}$ и $\dddot{z}$, полученные в (7), уже могут быть использованы в (1) – (6) без каких либо проблем.

Иногда при исследовании пространственных кривых возникает необходимость определения значений производных их основных характеристик (1) – (6). В этом случае воспользуемся принципом перенесения А. П. Котельникова [4], который в упрощенном виде может быть сформулирован так: «Решение, полученное на множестве вещественных чисел, может быть перенесено в область дуальных чисел путем замены вещественных чисел и функций на дуальные числа и соответствующие функции дуального аргумента». Для реализации этого необходимо выполнить перенос соотношений (1) – (6) в область дуальных чисел 3-го класса:

$$\vec{r}(t) \to \vec{R}(T),\ t \to T,\ \kappa_1(t) \to K_1(T),\ \kappa_2(t) \to K_2(T),\ \vec{\tau}(t) \to \vec{T}(T),\ \vec{b}(t) \to \vec{B}(T),\ \vec{n}(t) \to \vec{N}(T),$$

$$x(t) \to X(T),\ y(t) \to Y(T),\ z(t) \to Z(T),\ l \to L$$

В результате такого переноса получим:

$$\begin{aligned} &\vec{R}(T) = X(T)\vec{\imath} + Y(T)\vec{\jmath} + Z(T)\vec{k}, \\ &X(T) = x(t) + \dot{x}(t)\boldsymbol{\varepsilon} + \ddot{x}(t)\boldsymbol{\omega} + \dddot{x}(t)\boldsymbol{\gamma}, \\ &Y(T) = y(t) + \dot{y}(t)\boldsymbol{\varepsilon} + \ddot{y}(t)\boldsymbol{\omega} + \dddot{y}(t)\boldsymbol{\gamma}, \\ &Z(T) = z(t) + \dot{z}(t)\boldsymbol{\varepsilon} + \ddot{z}(t)\boldsymbol{\omega} + \dddot{z}(t)\boldsymbol{\gamma}, \\ &T = t + \boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} + 0\boldsymbol{\gamma}, \\ &K_1 = \frac{\left|\dot{\vec{R}} \times \ddot{\vec{R}}\right|}{\left|\dot{\vec{R}}\right|^3},\ K_2 = \frac{\dot{\vec{R}} \cdot (\ddot{\vec{R}} \times \dddot{\vec{R}})}{\left|\dot{\vec{R}} \times \ddot{R}\right|^2},\ \ \vec{T} = \dot{\vec{R}},\ \vec{B} = \dot{\vec{R}} \times \ddot{\vec{R}},\ \vec{N} = \vec{T} \times \vec{B} \end{aligned} \tag{8}$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\vec{R}}(t) \cdot \dot{\vec{R}}(t)}\ dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\rho(t)}\ dt + \left[\sqrt{\rho(t)}\boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\sqrt{\rho(t)}}\boldsymbol{\omega}\right]_{t_0}^{t_1} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},$$

$$\rho(t) = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)$$

Векторные операции над гипер-дуальными векторами типа $\vec{R}(T)$ следуют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{\imath} + (A_y + B_y)\vec{\jmath} + (A_z + B_z)\vec{k}, \\ &\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z, \\ &\vec{A} \times \vec{B} = (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y)\vec{\imath} + (A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z)\vec{\jmath} + (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x)\vec{k}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = A_x\cdot(B_y\cdot C_z - B_z\cdot C_y) + A_y\cdot(B_z\cdot C_x - B_x\cdot C_z) + A_z\cdot(B_x\cdot C_y - B_y\cdot C_x),$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

В свою очередь производные гипер-дуального вектора $\vec{R}(T)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
&\dot{\vec{R}} = \dot{X}\vec{\imath} + \dot{Y}\vec{\jmath} + \dot{Z}\vec{k}, \quad \ddot{\vec{R}} = \ddot{X}\vec{\imath} + \ddot{Y}\vec{\jmath} + \ddot{Z}\vec{k}, \quad \dddot{\vec{R}} = \dddot{X}\vec{\imath} + \dddot{Y}\vec{\jmath} + \dddot{Z}\vec{k},\\
&\dot{X} = \dot{x} + \ddot{x}\boldsymbol{\varepsilon} + \dddot{x}\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},\ \ddot{X} = \ddot{x} + \dddot{x}\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},\ \dddot{X} = \dddot{x} + \emptyset\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},\\
&\dot{Y} = \dot{y} + \ddot{y}\boldsymbol{\varepsilon} + \dddot{y}\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},\ \ddot{Y} = \ddot{y} + \dddot{y}\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},\ \dddot{Y} = \dddot{y} + \emptyset\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},\\
&\dot{Z} = \dot{z} + \ddot{z}\boldsymbol{\varepsilon} + \dddot{z}\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},\ \ddot{Z} = \ddot{z} + \dddot{z}\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},\ \dddot{Z} = \dddot{z} + \emptyset\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},
\end{aligned} \tag{10}$$

где: $\emptyset$ - не актуальное число или пусто (NaN). Результат операций в которых участвует $\emptyset$ равен $\emptyset$.

Введение элемента $\emptyset$ обусловлено тем что исходная функция от дуального аргумента 3-го класса может содержать значения производных только первого, второго и третьего порядков. Фактически дифференцирование X, Y и Z сводится к смещению их мнимых частей влево, а затем заполнению освободившихся мест элементом $\emptyset$, что напоминает стек, организованный по принципу: последний пришел – первый вышел.

Для примера запишем направляющую бинормали в терминах функций дуальных чисел 3-го класса, с ученом правил умножения мнимого базиса $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$ и свойств $\emptyset$, имеем

$$\vec{B} = \dot{\vec{R}}\times\ddot{\vec{R}} = (\dot{Y}\cdot\ddot{Z} - \dot{Z}\cdot\ddot{Y})\vec{\imath} + (\dot{Z}\cdot\ddot{X} - \dot{X}\cdot\ddot{Z})\vec{\jmath} + (\dot{X}\cdot\ddot{Y} - \dot{Y}\cdot\ddot{X})\vec{k} =$$

$$= [(\dot{y}\cdot\ddot{z} - \dot{z}\cdot\ddot{y}) + (\dot{y}\cdot\dddot{z} - \dot{z}\cdot\dddot{y})\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma}]\vec{\imath} +$$

$$+ [(\dot{z}\cdot\ddot{x} - \dot{x}\cdot\ddot{z}) + (\dot{z}\cdot\dddot{x} - \dot{x}\cdot\dddot{z})\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma}]\vec{\jmath} +$$

$$+ [(\dot{x}\cdot\ddot{y} - \dot{y}\cdot\ddot{x}) + (\dot{x}\cdot\dddot{y} - \dot{y}\cdot\dddot{x})\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma}]\vec{k} = \vec{b} + \dot{\vec{b}}\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma}$$

Из сопоставления полученного соотношения с формулами для $\vec{b}$:

$$\vec{b} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\end{vmatrix},\ \dot{\vec{b}} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix},\ \ddot{\vec{b}} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddddot{x} & \ddddot{y} & \ddddot{z}\end{vmatrix},\ \dddot{\vec{b}} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x} & \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{y} & \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{z}\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \ddddot{x} & \ddddot{y} & \ddddot{z}\end{vmatrix},$$

видно, что функции дуальных чисел 3-го класса обеспечивают правильные значения только для $\vec{b}$ и $\dot{\vec{b}}$. В следующей таблице приведена структура соотношений для $\vec{R}$, $\vec{T}$, $\vec{B}$, $\vec{N}$, K_1 и K_2

$$\begin{aligned}
&\vec{R} = \vec{r} + \dot{\vec{r}}\boldsymbol{\varepsilon} + \ddot{\vec{r}}\boldsymbol{\omega} + \dddot{\vec{r}}\boldsymbol{\gamma}, && \vec{N} = \vec{n} + \dot{\vec{n}}\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},\\
&\vec{T} = \vec{\tau} + \dot{\vec{\tau}}\boldsymbol{\varepsilon} + \ddot{\vec{\tau}}\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma}, && K_1 = \kappa_1 + \dot{\kappa}_1\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma},\\
&\vec{B} = \vec{b} + \dot{\vec{b}}\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma}, && K_2 = \kappa_2 + \emptyset\boldsymbol{\varepsilon} + \emptyset\boldsymbol{\omega} + \emptyset\boldsymbol{\gamma}
\end{aligned} \tag{11}$$

При необходимости получения производных более высокого порядка нужно использовать более высокий класс дуальных чисел. Так, например, для учёта вторых производных $\ddot{\vec{b}}$ следует применять 4-й класс дуальных чисел, для третьих производных 5-й класс и т.д.

Компьютерная реализация алгебры векторов с координатами в виде дуальных чисел 3-го класса Tdn3 была выполнена на языке SWIFT операционной системы macOS. Был создан новый тип данных Thdn3D и его расширение, которое включает векторные операциии (9), а именно: +, –, скалярное dot(...), векторное cross(...), смешанное triple(...) умножения и смещение shift(...) (см. Приложение 1). Отдельно (Приложение 2) представлены процедуры вычисления кривизны curvature(...) и кручения torsion(...) кривой. В Приложении 3 даны примеры обращения к процедурам curvature(...) и torsion (...).

С целью проверки адекватности работы прикладных программ, приведенных в Приложении 2, была проведена верификация вычислительных алгоритмов на основе сравнения численных и аналитических решений, полученных для тестовых задач. В следующей таблице приведены результаты для некоторые тест-функций, заимствованых из [5]:

r(t)	t	κ_1	$\dot{\kappa}_1$	κ_2
$r_1(t) = e^t\vec{\imath} + e^{-t}\vec{\jmath} + \sqrt{2}t\vec{k}$	0	0.353553	0	-0.353553
	1	0.148483	-0.226168	-0.148483
$r_2(t) = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath} + t\vec{k}$	0	0.4999(9)	0	0.4999(9)
	1	0.4999(9)	0	0.4999(9)
$r_3(t) = (t - \sin(t))\,\vec{\imath} + (1 - \cos(t))\vec{\jmath} + 4\sin(t/2)\vec{k}$	0	0.250000	0	-0.500000
	1	0.277246	0.047423	-0.397788
$r_4(t) = \mathrm{ch}(t)\cdot\cos(t)\vec{\imath} + ch(t)\cdot\sin(t)\vec{\jmath} + t\vec{k}$	0	0	0	0
	1	0.348995	-0.733425	0.419974
$r_5(t) = \mathrm{ch}(t)\vec{\imath} + sh(t)\vec{\jmath} + t\vec{k}$	0	0.4999(9)	0	0.4999(9)
	1	0.209987	-0.319850	0.209987
$r_6(t) = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + t^3\vec{k}$	0	2.000000	0	3.000000
	1	0.166423	-0.548071	0.157895
$r_7(t) = e^t\cdot\cos(t)\vec{\imath} + e^t\cdot\sin(t)\vec{\jmath} + t\vec{k}$	0	0.544331	-0.272166	0.4999(9)
	1	0.251245	-0.233424	0.119203

Расчеты проводились в операционной среде MacOS Ventura с CPU 2.3 GHz.

Полученные формулы и процедуры численного определения основных локальных характеристик пространственных кривых (кривизна, кручение, касательная, нормаль, бинормаль), основанные на использовании типа данных Thdn3D и автоматического дифференцирования, обладают универсальностью, позволяющей рассматривать функции $\vec{R}(T),\ K_1(T),\ K_2(T),\ \vec{T}(T), \vec{B}(T),\ \vec{N}(T)$ как некие «черные ящики», поставляющие значения функций и точные величины их производных по заданному значению $T = t + 1\boldsymbol{\varepsilon} + 0\boldsymbol{\omega} + 0\boldsymbol{\gamma}$. Определение длины дуги плоской кривой и площади поверхности вращения на базе дуальных чисел 2-го класса Thdn (truncated hyper-dual number) были рассмотрены автором в [3].

Приложение 1

```
// Для реализации приведенного ниже кода необходимо добавить файл, описывающий тип
// данных Thd3 (см. [2])


struct Thdn3D{
  var X,Y,Z: Tdn3;
  init(){self.X = Tdn3(); self.Y = Tdn3(); self.Z = Tdn3()}
  init(X:Tdn3, Y:Tdn3, Z:Tdn3){self.X = X; self.Y = Y; self.Z = Z}
}
extension Thdn3D{
  static func norm(X:Thdn3D)->Tdn3{ return Tdn3.sqrt(X: self.dot(X: X, Y: X))}
  static func + (A:Thdn3D, B:Thdn3D) ->Thdn3D{
    return Thdn3D(X: A.X + B.X, Y: A.Y + B.Y, Z: A.Z + B.Z)
  }
  static func - (A:Thdn3D, B:Thdn3D) ->Thdn3D{
    return Thdn3D(X: A.X - B.X, Y: A.Y - B.Y, Z: A.Z - B.Z)
  }
  static func dot(X:Thdn3D, Y:Thdn3D) ->Tdn3{
    return  X.X*Y.X + X.Y*Y.Y + X.Z*Y.Z;
  }
  static func cross(X:Thdn3D, Y:Thdn3D) ->Thdn3D{
    return Thdn3D(X: X.Y*Y.Z - X.Z*Y.Y,
           Y: X.Z*Y.X - X.X*Y.Z,
           Z: X.X*Y.Y - X.Y*Y.X);
  }
  static func triple(X:Thdn3D, Y:Thdn3D, Z:Thdn3D) ->Tdn3{
    return  Thdn3D.dot(X:X, Y:Thdn3D.cross(X:Y, Y:Z));
  }
  static func shift(R:Thdn3D)->Thdn3D{
    var R1 = Thdn3D();
    R1.X.re  = R.X.im1;   R1.X.im1 = R.X.im2;   R1.X.im2 = R.X.im3;  R1.X.im3 = Double.nan;
    R1.Y.re  = R.Y.im1;   R1.Y.im1 = R.Y.im2;   R1.Y.im2 = R.Y.im3;  R1.Y.im3 = Double.nan;
    R1.Z.re  = R.Z.im1;   R1.Z.im1 = R.Z.im2;   R1.Z.im2 = R.Z.im3;  R1.Z.im3 = Double.nan;
    return R1;
  }
}
```

Приложение 2

```
// Процедуры curvature(...), torsion(...):

  func curvature(t: Double, F:(Tdn3) -> Thdn3D)->Tdn3{
    let R_ = F(Tdn3(re:t, im1:1, im2:0, im3:0));
    let R_1 = Thdn3D.shift(R:R_);
```

```
    let R_2 = Thdn3D.shift(R:R_1);
    var B_  = Thdn3D.cross(X:R_1, Y:R_2);
    let NB  = Thdn3D.norm(X: B_);
    let NR1 = Thdn3D.norm(X: R_1)
    let res = NB/(NR1*NR1*NR1)
    return NB/(NR1*NR1*NR1);
  }

  func torsion(t: Double, F:(Tdn3) -> Thdn3D)->Tdn3{
    let R_ = F(Tdn3(re:t, im1:1, im2:0, im3:0));
    let R_1 = Thdn3D.shift(R:R_);
    let R_2 = Thdn3D.shift(R:R_1);
    let R_3 = Thdn3D.shift(R:R_2);
    let B_  = Thdn3D.cross(X:R_1, Y:R_2);
    let NB  = Thdn3D.norm(X: B_);
    let B2  =  NB*NB;
    var TR = Thdn3D.triple(X:R_1, Y:R_2, Z:R_3);
    var res = TR/B2;
    return TR/B2;
  }
```

Приложение 3

```
// Design function:
func screw (T:Tdn3)->Thdn3D{
  return Thdn3D(X: Tdn3.cos(X: T), Y: Tdn3.sin(X: T), Z: T);
}

// Procedure call examples:
let cur  = curvature(t: 0, F: screw);
let tors = torsion(t: 1, F: screw);
```

Литература

1. *Кармо М. П.* Дифференциальная геометрия гривых и поверхностей. –М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. – 608с.

2. *Олифер В. И.* Автоматическое дифференцирование на основе супер-дуальных чисел. –URL: http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/Автоматическое_дифференцирование_на_основе_супер-дуальных_чисел.pdf , 2020.

3. *Олифер В. И.* К определению длины дуги и площади поверхности вращения на основе гипер-дуальных чисел. –URL: http://viosolutions.amerihomesrealty.com/pdf/К_определению_длины_дуги_и_площади_поверхности_вращения_на_основе_гипер-дуальных_чисел.pdf, 2022.

4. *Котельников А. П.* Винты и комплексные числа. Казань, 1896. – 6 с.

5. *Abbena E., Salamon S., Gray A.,* Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 3rd Edition. – Chapman & Hall, 2006. –1016 pp.

Абстракт

В публикации рассматривается применение метода автоматического дифференцирования, основанного на усеченных гипер-дуальных чисел, для определения основных характеристик локальных свойств кривых и их производных. Представлена компьютерная реализация описанного подхода для языка SWIFT операционной системы macOS и на основе которой проведены численные эксперименты.

Ключевые слова: *дифференциальная геометрия кривых, кривизна, кручение, касательная, нормаль, бинормаль кривой, гипер-дуальные числа, автоматическое дифференцирование, differential geometry of curves, curvature, torsion, tangent, normal, curve binormal, hyper-dual numbers, automatic differentiation.*

20 декабря 2022 г.